

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a la matriu A és invertible.

[1 punt]

Calculem el determinant de la matriu A :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = a(a^2 - 3a + 2) = a(a-1)(a-2)$$

Aleshores, per a tot $a \neq 0, 1, 2$ tenim que $|A| \neq 0$ i la matriu és invertible.

b) Comproveu que, per al cas $a=3$, la matriu A és invertible i resoleu l'equació matri-

cial $AX = B - 3I$, en què B és la matriu $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

[1,5 punts]

Per $a = 3$ la matriu és $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

El determinant de la matriu A és $|A| = 6 \neq 0$, per tant, A és invertible. Calculem la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Així, podem resoldre l'equació donada, multiplicant per l'esquerra cada banda de l'equació per la matriu inversa de A :

$$A \cdot X = B - 3I \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment obtenim X :

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$