

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

- a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.
[1,5 punts]

Per trobar els punts crítics, calculem la primera derivada i la iguaem a zero:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \text{ o bé } x = 3$$

Tenim dos punts crítics $x = 0$ i $x = 3$. Classifiquem-los a partir del signe de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq 3 \\ < 0 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Així per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent. Cal tenir en compte que per $x = 2$ la funció no està definida. Així la funció és decreixent en: $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ i és creixent en $(3, +\infty)$. Si es considera monotonía estricta caldria excloure també $x = 0$.

Com que en un entorn de $x = 0$ la funció és decreixent i és un punt crític, es tracta d'un punt d'inflexió.

En canvi per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent, per tant, en $x = 3$ fa un mínim relatiu.

- b) Comproveu que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en l'interval $(-2, 1)$.
[1 punt]

La funció és continua en l'interval $(-2, 1)$ ja que és un quocient de polinomis, que són funcions contínues i el denominador no s'anul·la. Avaluem la funció en els extrems de l'interval:

$$f(-2) = \frac{-8}{-4} = 2 > 0 \text{ i } f(1) = \frac{1}{-1} = -1 < 0$$

Pel teorema de Bolzano podem afirmar que f té com a mínim un zero en l'interval $(-2, 1)$. Com que la funció és estrictament monòtona en aquest interval, només té un zero dins d'aquest interval. De fet, és fàcil veure que $f(0) = 0$.