

Problema 1. Es considera el següent sistema d'equacions lineals que depèn d'un paràmetre real m :

$$\begin{aligned} -x + y + z &= m \\ 2x + m y - z &= 3m \\ (m-1)x + 3y - z &= 6 + m. \end{aligned}$$

Es demana:

- a) Discutir el sistema en funció dels valors del paràmetre m .

(6 punts)

Primer, escrivim la matriu dels coeficients A i la matriu augmentada $[A|B]$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 3m \\ 6+m \end{pmatrix}$$

El determinant de A és:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculem aquest determinant utilitzant l'expansió per la primera fila:

$$\det(A) = -1 \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & m \\ m-1 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculem els menors:

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = m(-1) - (-1)3 = -m + 3 = 3 - m$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - (-1)(m-1) = -2 + m - 1 = m - 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & m \\ m-1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - m(m-1) = 6 - m^2 + m = 6 + m - m^2$$

Substituïm aquests resultats en el determinant de A :

$$\det(A) = -1(3 - m) - (m - 3) + (6 + m - m^2)$$

$$\det(A) = -3 + m - m + 3 + 6 + m - m^2 = 6 + m - m^2$$

$$\det(A) = -m^2 + m + 6$$

Busquem els valors de m que fan que $\det(A) = 0$:

$$-m^2 + m + 6 = 0$$

Resolució de l'equació quadràtica:

$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$m = 3 \quad \text{o} \quad m = -2$$

Discussió segons m

1. $m \neq 3$ i $m \neq -2$

Quan $m \neq 3$ i $m \neq -2$, $\det(A) \neq 0$, per tant el sistema té una solució única.

2. $m = 3$

Quan $m = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, $\det(A) = 0$, però cal verificar el rang de la matriu augmentada $[A|B]$:

$$[A|B] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Podem veure que les files 2 i 3 són linealment dependents, i es pot reduir el sistema a una matriu de rang 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema té rang 2, el mateix que la matriu A , però amb una fila de zeros a la matriu augmentada, la qual cosa indica que tenim infinites solucions (sistema compatible indeterminat).

3. $m = -2$

Quan $m = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, $\det(A) = 0$, i cal verificar el rang de la matriu augmentada $[A|B]$:

$$[A|B] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Podem veure que el rang de A és 2, però el rang de la matriu augmentada és 3, ja que la tercera fila no és combinació lineal de les dues primeres files quan $m = -2$. Això indica que el sistema és incompatible (no hi ha solució).

Resum Final

- $m = 3$: Sistema compatible indeterminat (infinites solucions).
- $m = -2$: Sistema incompatible (cap solució).
- $m \neq 3$ i $m \neq -2$: Sistema compatible determinat (solució única).

b) Per als valors de m per als quals el sistema és compatible indeterminat, trobar la solució. (4 punts)

Sistema amb $m = 3$

Quan $m = 3$, el sistema és:

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{cases}$$

El sistema es redueix a:

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Això implica que la tercera equació és redundant, i tenim dues equacions amb tres incògnites, el que resulta en infinites solucions.

Reducció del Sistema

Treballem amb les dues primeres equacions:

$$1. -x + y + z = 3$$

$$2. 2x + 3y - z = 9$$

Per resoldre aquest sistema, expressarem una variable en funció de les altres dues. Escollim z com a variable dependent:

$$1. -x + y + z = 3 \Rightarrow z = 3 + x - y$$

$$2. 2x + 3y - (3 + x - y) = 9$$

Substituïm z a la segona equació:

$$2x + 3y - (3 + x - y) = 9$$

Simplifiquem:

$$2x + 3y - 3 - x + y = 9$$

$$x + 4y - 3 = 9$$

$$x + 4y = 12$$

Aquesta equació es pot resoldre per x :

$$x = 12 - 4y$$

Solució General

Ara tenim les solucions per x i z en funció de y :

$$x = 12 - 4y$$

$$z = 3 + (12 - 4y) - y = 15 - 5y$$

La solució general del sistema és:

$$(x, y, z) = (12 - 4y, y, 15 - 5y)$$

On y és un paràmetre lliure que pot prendre qualsevol valor real. Això confirma que el sistema té infinites solucions per a $m = 3$.

Resum

Quan $m = 3$, el sistema és compatible indeterminat amb la solució general:

$$(x, y, z) = (12 - 4y, y, 15 - 5y)$$

On y és un paràmetre lliure que pot prendre qualsevol valor real.