

1. Considereu la funció $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$, definida per a $x > 0$.

a) Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.
[1 punt]

Derivant i igualant a zero,

$$f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$$

ens queda l'equació $\ln x = 1$; per tant, f té només un punt crític, $x = e$. Resulta que és un màxim ja que la derivada segona és negativa:

$$f''(x) = 2 \frac{-\frac{1}{x^2}x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4}, \quad f''(e) = 2 \frac{-e}{e^4} = -2e^{-3} < 0.$$

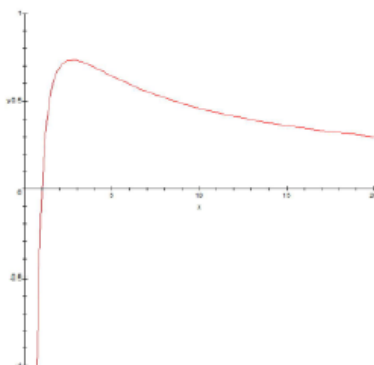
Com que només té un màxim, la funció és creixent a l'interval $(0, e)$ i decreixent a $(e, +\infty)$, cosa que també podem veure directament mirant el signe de la derivada.

b) Aquesta funció té asímtotes? Feu un esbós de la seva gràfica.
[1 punt]

A zero, hi ha una asímtota vertical, ja que $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. I a infinit, una asímtota horitzontal, cosa que es veu fent l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+,$$

o bé argumentant que, per a $x > e$ la funció és sempre decreixent, però no travessa mai l'eix d'abscisses, ja que $2 \frac{\ln x}{x} = 0$ només té la solució $x = 1$. Aquest és un esbós de la gràfica d'aquesta funció:



- c) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=1$.
[0,5 punts]

Com que $f(1) = 2 \frac{\ln 1}{1} = 0$ i $f'(1) = 2 \frac{1-\ln 1}{1^2} = 2$, es tracta de la recta que passa pel punt $(1,0)$ i té pendent 2: és la recta $y - 0 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 2$.