

1. Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.

a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.

[0,75 punts]

Com que $f'(x) = 3x^2 - 12x$, integrant tenim que $f(x) = x^3 - 6x^2 + C$, on C és una constant real.

Ara bé, sabem que $f(x)$ talla l'eix d'abscises en $x = 1$, per tant, $f(1) = 0$. Substituïm:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0 \rightarrow C = 5$$

I obtenim $\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}$.

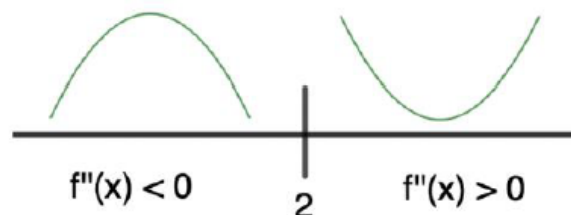
b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudeu la concavitat de la funció.

[0,75 punts]

En el punt d'inflexió s'anul·larà la derivada segona:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

Per estudiar la concavitat de $f(x)$, estudiarem el signe de la derivada segona:



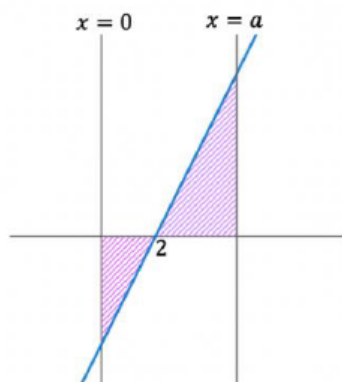
A l'esquerra del punt $x = 2$ la derivada segona és negativa i a la dreta del punt $x = 2$ la derivada segona és positiva.

Per tant:

- En el punt $(2, f(2))$ hi ha un punt d'inflexió.
- La funció té concavitat negativa o és còncava cap avall a l'interval $(-\infty, 2)$
- La funció té concavitat positiva o és còncava cap amunt a l'interval $(2, +\infty)$

- c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y=f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x=0$ i $x=a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a .
[1 punt]

La funció $f''(x) = 6x - 12$ talla l'eix d'abscisses en $x = 2$ i l'enunciat ens diu que $a > 2$, fets que s'hauran de tenir en compte en el càlcul de les integrals definides:



$$15 = \int_0^2 (12 - 6x)dx + \int_2^a (6x - 12)dx$$

$$15 = [12x - 3x^2]_0^2 + [3x^2 - 12x]_2^a$$

$$15 = 24 - 12 + 3a^2 - 12a - 12 + 24$$

$$3a^2 - 12a + 9 = 0 \rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

Resolem l'equació de segon grau:

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Com que $a > 2$, només hi ha una solució: $\boxed{a = 3}$.

Observació: el plantejament de l'àrea també es pot fer a partir de la suma de les àrees dels dos triangles de la figura i no fent esment de cap càlcul integral.