

1. Siguin les matrius $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Comproveu que $C^3 = I_2$, en què I_2 és la matriu identitat d'ordre 2, i deduiu que la matriu C és invertible i que $C^{-1} = C^2$. Calculeu C^{2022} .

[1,5 punts]

Efectivament, si multipliquem

$$\begin{aligned} C^3 &= C^2 \cdot C = C \cdot C^2 = C \cdot C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant en multiplicar C per C^2 , i a l'inrevés, obtenim la identitat. Amb això provem que la matriu C és invertible i que la seva inversa és C^2

$$C^2 = C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular C^{2022} , com que $2022=3 \cdot 674$, $\boxed{C^{2022} = (C^3)^{674} = I_2^{674} = \boxed{I_2}}$.

- b) Resoleu l'equació matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.

[1 punt]

De l'equació $C \cdot X = A - 2 \cdot I_2$, multiplicant ambdós termes per l'esquerra per C^{-1} obtenim:

$$\begin{aligned} \boxed{X} &= C^{-1} \cdot (A - 2 \cdot I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$