

1. Considereu les funcions $f(x) = -x^2 + x + 6$ i $g(x) = -9x + 3x^2$.
a) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per les dues funcions.
[1,25 punts]

Punts de tall: $-x^2 + x + 6 = -9x + 3x^2 \rightarrow 4x^2 - 10x - 6 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{8} = \frac{10 \pm 14}{8} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comprovem la posició de cadascuna de les corbes:

A $(-\frac{1}{2}, 3)$ comprovem que $f(x) > g(x)$ per a qualsevol $x \in (-\frac{1}{2}, 3)$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{2}}^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^3 (-x^2 + x + 6 - (-9x + 3x^2)) dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^3 (-4x^2 + 10x + 6) dx = \left[-\frac{4}{3}x^3 + 5x^2 + 6x \right]_{-1/2}^3 = \\ &= \left((-36 + 45 + 18) - \left(\frac{4}{24} + \frac{5}{4} - 3 \right) \right) = \left(27 - \left(-\frac{19}{12} \right) \right) = \boxed{\frac{343}{12} u^2} \end{aligned}$$

- b)** Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $(-2, 0)$. Representeu aquesta recta tangent i les funcions $f(x)$ i $g(x)$ en uns mateixos eixos de coordenades.
[1,25 punts]

Calculem la recta tangent a $f(x) = -x^2 + x + 6$ que passa pel punt $(-2, 0)$:

El pendent ve donat per la derivada de la funció:

$$f'(x) = -2x + 1 \rightarrow f'(-2) = -2(-2) + 1 = 5$$

El passa pel punt $(-2, 0) \rightarrow f(-2) = 0$

Així la recta tangent serà de la forma:

$$y = 5x + n \rightarrow 0 = 5(-2) + n \rightarrow n = 10$$

El tenim: $y = 5x + 10$

Per fer la representació gràfica observem que la recta $y = 5x + 10$ passa pels punts $(0, 10)$ i $(-2, 0)$.

La gràfica de la funció f és una paràbola amb les branques cap avall i el vèrtex en el punt de coordenades:

$$f(x) = -x^2 + x + 6 \rightarrow f'(x) = -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$$

I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(-2,0)$ i $(3,0)$ ja que:

$$-x^2 + x + 6 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ i } x = 3.$$

La gràfica de la funció g és una paràbola amb les branques cap amunt i el vèrtex en el punt de coordenades:

$$g(x) = -9x + 3x^2 \rightarrow g'(x) = -9 + 6x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{4}\right)$$

I els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(0,0)$ i $(3,0)$ ja que:

$$-9x + 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ i } x = 3.$$

