

1. Considereu la funció $f(x) = -2 + 10(x - 1) \ln x$, definida per a $x > 0$.
- a) Comproveu que $f(x)$ té una arrel a l'interval $[1, 1.5]$ i busqueu un interval d'una dècima de longitud que també contingui aquesta mateixa arrel.
- [0,75 punts]

Com que es tracta d'una funció contínua a l'interval $[1, 1.5]$ i $f(1) = -2 < 0$ i $f(1.5) = -2 + 5 \ln 1.5 = 0.027 \dots > 0$, el Teorema de Bolzano ens assegura que hi ha una arrel a l'interval $(1, 1.5)$. Temptejant altres punts d'aquest interval, veiem que $f(1.3) = -2 + 3 \ln 1.3 = -1.212 \dots < 0$, per tant, l'arrel està a l'interval $[1.3, 1.5]$. I també $f(1.4) = -2 + 4 \ln 1.4 = -0.654 \dots < 0$ i, per tant, l'arrel està a l'interval $[1.4, 1.5]$.

- b) Sense calcular els punts crítics, justifiqueu que $f(x)$ és decreixent a l'interval $(0, 1)$ i creixent a $(1, +\infty)$. Quins màxims i mínims té aquesta funció?
- [1 punt]

Calculem la derivada $f'(x) = 10 \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right)$ i observem que, d'entrada, no sabem aïllar la x de l'equació $f'(x) = 0$. Però es veu clarament que a l'interval $(0,1)$ tenim $\ln x < 0$ i $\frac{x-1}{x} < 0$ per tant, $f'(x) < 0$ i la funció serà decreixent. De la mateixa manera, a l'interval $(1, +\infty)$ tenim $\ln x > 0$ i $\frac{x-1}{x} > 0$ per tant, $f'(x) > 0$ i la funció serà creixent. En conseqüència, $f(x)$ té un únic punt crític al punt $x = 1$, que és mínim, i no té cap màxim.

- c) Calculeu $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, i feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció.
[0,75 punts]

Els dos límits demanats són immediats:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 + 10(x-1) \ln x) = -2 + 10(-1)(-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + 10(x-1) \ln x) = -2 + 10 \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Tenint en compte totes aquestes dades, la gràfica d'aquesta funció és

