Problema 2 sèrie 1 juny 2023 Catalunya (àlgebra MAT).

2. Considereu les dues matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu les matrius $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.
[1,5 punts]

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=A$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=B$$

Observació: la resolució es donarà per bona encara que no apareguin els càlculs intermedis.

b) Siguin $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$ dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$. Comproveu que les dues matrius, $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$, són idempotents.
[1 punt]

NOTA: Una matriu quadrada s'anomena *idempotent* si coincideix amb el seu quadrat.

b) Sabem que $(*)\ C\cdot D=C$ i $(**)\ D\cdot C=D$

$$C^2=C\cdot C\underbrace{=}_{(*)}(C\cdot D)\cdot C=C\cdot(D\cdot C)\underbrace{=}_{(**)}C\cdot D\underbrace{=}_{(*)}C$$

$$D^2=D\cdot D\underbrace{=}_{(**)}(D\cdot C)\cdot D=D\cdot(C\cdot D)\underbrace{=}_{(*)}D\cdot C\underbrace{=}_{(**)}D$$

I, per tant, efectivament les dues matrius C i D són idempotents.