

2. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\},$$

on k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k , i resoleu-lo per a $k = 0$.

[1 punt]

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculant el determinant de coeficients i igualant-lo a zero obtenim

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 6k - 3 - 12k = -6k - 6 = 0,$$

és a dir, $k = -1$. Per tant, si $k \neq -1$, tindrem $\text{rang}(M) = \text{rang}(\overline{M}) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites i, pel teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat. En canvi, si $k = -1$, el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\};$$

com que la tercera equació és la resta de la primera menys la segona, es tracta d'un sistema de dues equacions i tres incògnites, amb rang de coeficients 2 ja que $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$-4 - 2 = -6 \neq 0$. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

La solució per a $k = 0$ la podem calcular per la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 18 + 12 + 12 - 36 - 2}{-6} = 0.$$

b) Resoleu el sistema per a $k = -1$.

[0,75 punts]

Per al cas $k = -1$, i eliminant la tercera equació per ser redundant, obtenim

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \end{cases}.$$

Restant, obtenim $3x + 3y = 1$. Fent $x = \lambda$, tenim $y = \frac{1}{3} - \lambda$ i llavors $z = x - y - 3 = \lambda - \frac{1}{3} + \lambda - 3 = 2\lambda - \frac{10}{3}$. Totes les solucions del sistema són, doncs, de la forma

$$(x, y, z) = \left(\lambda, \frac{1}{3} - \lambda, 2\lambda - \frac{10}{3} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- c) Per a $k = -1$, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.

[0,75 punts]

Com hem notat, en el cas $k = -1$, la tercera equació és redundant perquè és la resta de la primera menys la segona. Si modifiquem el terme independent posant, per exemple, $3x + 3y = 2$ tindrem la incongruència $1 = 2$ i el sistema serà incompatible.

Dit d'una altra manera, és incompatible perquè la matriu de coeficients no ha canviat, i té rang 2, mentre que ara la matriu ampliada té rang 3 ja que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 + 12 - 2 = -3 \neq 0.$$