

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1,5 punts]

La matriu de coeficients i la matriu ampliada, A i A' , són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)}_{A'}$$

En primer lloc, es calcula $\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4a^2 + 6 + 2 - 3a - a - 16 = 4a^2 - 4a - 8$$

que s'anul·la per als valors de $a = -1$ i $a = 2$.

A continuació s'estudien els tres casos: $a = -1$, $a = 2$ i $a \neq -1, 2$.

CAS $a = -1$

S'obté el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

On s'observa que sumant la primera més la segona equació s'obté la tercera per tant, el $\text{rang}(A)$ i el $\text{rang}(A')$ no seran màxims:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)}_{A'}$$

Com que sabem que $\det(A) = 0$ i tenim que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores el $\text{rang}(A) = 2$.

Com que de la suma de la primera més la segona equació s'obté la tercera, tots els menors d'ordre 3 seran nuls, i per al menor d'ordre dos no nul anterior, $\text{rang}(A') = 2$.

També es pot argumentar que el $\text{rang}(A') < 3$ a partir de trobar que els determinants d'ordre corresponent són nuls.

Per tant, es té que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3 = \text{nombre d'incògnites}$.

Per tant és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat.

CAS $a = 2$

En aquest cas, s'obté el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

I en notació matricial s'obté

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)}_{A'}$$

On s'observa que la primera i la segona columna, dels coeficients de les x i les y , i el vector dels termes independents són iguals. Això ja ens diu que el rang de la matriu ampliada serà el mateix que el de la matriu de coeficients.

Per $a = 2$ sabem que el $\det(A) = 0$, i com que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el $\text{rang}(A) = 2$.

Respecte a la matriu ampliada s'observa que no es podrà trobar cap determinant d'ordre 3 no nul ja que el vector de termes independents coincideix amb la primera i segona columna de la matriu A . I, per tant, es té que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3 = \text{nombre d'incògnites}$. Per tant, és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat.

CAS $a \neq -1$ i $a \neq 2$

Sabem que $\det(A) \neq 0$, per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3 = \text{nombre d'incògnites}$ i és un sistema compatible determinat (SCD).

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $a = 2$.

[1 punt]

Per a $a = 2$, s'ha de resoldre el sistema que ja sabem que serà SCI:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fem la diferència de les dues primeres equacions i obtenim que $z = 0$.

Substituïm $z = 0$ i ens queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On s'observa que les tres equacions són equivalents i, per tant, es confirma que és un sistema compatible indeterminat.

Si prenem $y = \lambda$, obtenim que les solucions del sistema són de la forma: $\boxed{(1 - \lambda, \lambda, 0)}$.