

2. Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.

a) Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).

[1,25 punts]

Aplicarem l'equació: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

Com que $f(x): y = x^3$, $f(a) = a^3$, $f'(x) = 3x^2$, així que $f'(a) = 3a^2$

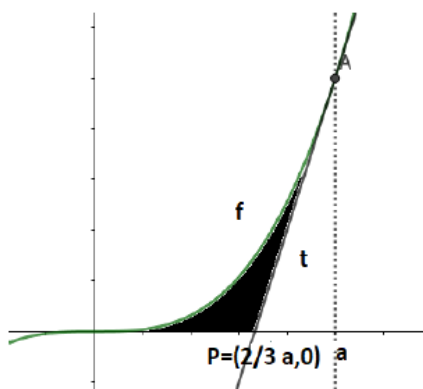
i tindrem $y = 3a^2 \cdot (x - a) + a^3 \rightarrow \boxed{t: y = 3a^2x - 2a^3}$.

El punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses ($y = 0$) és:

$0 = 3a^2 \cdot x - 2a^3 \rightarrow x = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}a$, així que el punt de tall és $\boxed{P = \left(\frac{2}{3}a, 0\right)}$.

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t . Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f , la recta t i l'eix de les abscisses sigui $108 u^2$.

[1,25 punts]



L'àrea que ens demanen és la regió ombrejada de la figura i es pot calcular fent l'àrea limitada per la funció f , entre $x = 0$ i $x = a$, menys l'àrea del triangle format per la recta tangent t i l'eix d'abscisses entre $x = \frac{2}{3}a$ i $x = a$.

$$A_T = \int_0^a x^3 dx - A_{triangle} = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a - \frac{\left(a - \frac{2}{3}a\right) \cdot a^3}{2} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{a^4}{12},$$

així que $\frac{a^4}{12} = 108 \rightarrow a^4 = 1296 \rightarrow \boxed{a = 6}$

Observació: També es pot calcular mitjançant la integral

$$A_T = \int_0^{\frac{2}{3}a} f(x) dx + \int_{\frac{2}{3}a}^a (f(x) - t(x)) dx.$$