

2. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} x - y + kz = -1 \\ x + ky + z = 3 \\ 2x + (k-1)y + 2z = 2 \end{array} \right\},$$

en què k és un paràmetre real.

a) Discussiu el sistema en funció del valor de k .

[1,5 punts]

Apliquem el mètode de Gauss, així tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Substituïm la fila 2, F2, per F2-F1, on F1 denota la primera fila, i la fila 3, F3, per F3-2F1, i obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right)$$

Substituïm F3 per F3 -F2 i s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & k+1 & 2-2k & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & k+1 & 1-k & 4 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{array}\right)$$

Distingim casos:

- $k \neq -1, k \neq 1$ tenim rang M = rang MA = número incògnites = 3 i per tant és un sistema compatible determinat (M denota la matriu del sistema i MA la matriu ampliada).
- $k = 1$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenim rang M= rang MA= 2 i per tant és un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

- $k = -1$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Fem un pas més canviant la F3 per F3-F2 i obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

que correspon a un sistema incompatible ja que rang MA=3 > rang M=2.

b) Resoleu el sistema per a $k = 0$ i per a $k = 1$.

[1 punt]

Recuperem els càlculs de l'apartat anterior.

Per a $k = 1$ obtenim $y = 2$ i $x = 1 - z$, per tant les solucions són de la forma $(x, y, z) = (1 - z, 2, z)$ o bé forma $(x, y, z) = (x, 2, 1 - x)$.

Per a $k = 0$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

I després de fer Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

I, per tant, la solució és $z = 0, y = 4$ i $x = 3$.