

2. Considereu les matrius $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Decidiu si la matriu P és invertible i, en cas de ser-ho, calculeu la seva inversa. Expliqueu detalladament el procediment seguit.

[1,25 punts]

Calculem el determinant de P :

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - (-1 + 0 + 2) = 1.$$

Com que és diferent de zero, la matriu P és invertible i la seva inversa és

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} (\text{Adj } P)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculeu una matriu X de 3 files i 3 columnes que compleixi $PX + Q = 2R$.

[1,25 punts]

La matriu X la podem trobar aïllant-la de l'equació lineal:

$$PX + Q = 2R,$$

$$PX = 2R - Q,$$

$$P^{-1}PX = P^{-1}(2R - Q),$$

$$\begin{aligned} X = P^{-1}(2R - Q) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$