

Problema 3. Atesa la funció $f(x) = \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$, es demana

a) El domini corresponent, i els punts de tall amb els eixos coordenats. (2 punts)

a) Domini i punts de tall amb els eixos de coordenades

Domini de la funció

Per determinar el domini d'una funció racional, hem de trobar els valors de x per als quals el denominador no és zero. Això es fa resolent l'equació del denominador igual a zero i exclouent aquests valors del domini.

El denominador de la funció és:

$$x(x-3) + (x+1).$$

Simplifiquem aquest denominador:

$$x(x-3) + (x+1) = x^2 - 3x + x + 1 = x^2 - 2x + 1.$$

Podem factoritzar el polinomi:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Per tant, el denominador és:

$$(x-1)^2.$$

El denominador és zero quan:

$$(x-1)^2 = 0.$$

Resolent:

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1.$$

Així, el denominador és zero quan $x = 1$. Això significa que la funció no està definida en aquest punt.

Domini: La funció $f(x)$ està definida per a tots els valors de x excepte $x = 1$. En notació de conjunt, el domini és:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}.$$

Punts de tall amb els eixos de coordenades

1. Tall amb l'eix x (eix horitzontal):

Els punts de tall amb l'eix x es troben quan $f(x) = 0$. Per trobar aquests punts, hem de resoldre per als valors de x en què el numerador és zero (assegurant-nos que el denominador no sigui zero en aquests punts).

El numerador de $f(x)$ és:

$$x^2 - 3x.$$

Resolent:

$$x^2 - 3x = 0.$$

Factoritzant:

$$x(x - 3) = 0.$$

Això dóna les solucions:

$$x = 0 \text{ o } x = 3.$$

Verifiquem que el denominador no és zero en aquests punts:

- Per a $x = 0$:

$$(0 - 1)^2 = 1 \neq 0.$$

- Per a $x = 3$:

$$(3 - 1)^2 = 4 \neq 0.$$

Per tant, els punts de tall amb l'eix x són:

- $(0, 0)$
- $(3, 0)$

2. Tall amb l'eix y (eix vertical):

Els punts de tall amb l'eix y es troben quan $x = 0$. Substituïm $x = 0$ a la funció $f(x)$:

$$f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{0(0-3) + (0+1)} = \frac{0}{1} = 0.$$

El punt de tall amb l'eix y és:

- $(0, 0)$

Resum

- Domini: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Punts de tall amb l'eix x : $(0, 0)$ i $(3, 0)$
- Punt de tall amb l'eix y : $(0, 0)$

b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(2 punts)

Asímtotes verticals

Les asímptotes verticals es produeixen quan el denominador de la funció és zero, sempre que el numerador no sigui zero en el mateix punt.

Ja hem trobat que el denominador és:

$$x(x - 3) + (x + 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

El denominador és zero quan:

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1.$$

Ens hem de assegurar que el numerador no és zero quan $x = 1$:

El numerador és:

$$x^2 - 3x.$$

Substituïm $x = 1$:

$$1^2 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2.$$

El numerador no és zero quan $x = 1$. Per tant, hi ha una asímptota vertical a $x = 1$.

Asímtota vertical: $x = 1$.

Asímtotes horitzontals

Les asímtotes horitzontals es determinen observant el comportament de la funció quan x tendeix a ∞ o a $-\infty$. Per a funcions racionals de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis, les asímtotes horitzontals es determinen comparant els graus de $P(x)$ i $Q(x)$:

1. Si el grau de $P(x)$ és menor que el grau de $Q(x)$: L'asímtota horitzontal és $y = 0$.
2. Si el grau de $P(x)$ és igual al grau de $Q(x)$: L'asímtota horitzontal és $y = \frac{a}{b}$, on a és el coeficient principal de $P(x)$ i b és el coeficient principal de $Q(x)$.
3. Si el grau de $P(x)$ és major que el grau de $Q(x)$: No hi ha asímtota horitzontal (potser hi ha una asímtota obliqua).

En el nostre cas, el numerador $x^2 - 3x$ té grau 2, i el denominador $(x - 1)^2$ també té grau 2. Així, el grau del numerador és igual al grau del denominador.

El coeficient principal del numerador és 1 (del terme x^2) i del denominador és 1 (del terme x^2).

Per tant, l'asímtota horitzontal és:

$$y = \frac{1}{1} = 1.$$

Asímtota horitzontal: $y = 1$.

Resum

- Asímtota vertical: $x = 1$.
- Asímtota horitzontal: $y = 1$.

c) Els intervals de creixement i decreixement.

(2 punts)

Derivada de la funció

Per trobar els intervals de creixement i decreixement, calculem la derivada de $f(x)$. Utilitzarem la regla del quocient per a la derivada:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\text{On } u(x) = x^2 - 3x \text{ i } v(x) = (x - 1)^2.$$

La regla del quocient diu que:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Calculem $u'(x)$ i $v'(x)$:

- $u(x) = x^2 - 3x$
 $u'(x) = 2x - 3$
- $v(x) = (x - 1)^2$
 $v'(x) = 2(x - 1)$

Aplicant la regla del quocient:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - (x^2-3x) \cdot 2(x-1)}{[(x-1)^2]^2}$$

Simplifiquem el numerador:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 2(x^2-3x)(x-1)}{(x-1)^4}$$

Expandim i simplifiquem:

1. Expansió del primer terme del numerador:

$$\begin{aligned}(2x - 3)(x - 1)^2 &= (2x - 3)(x^2 - 2x + 1) \\&= 2x(x^2 - 2x + 1) - 3(x^2 - 2x + 1) \\&= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 3x^2 + 6x - 3 \\&= 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3\end{aligned}$$

2. Expansió del segon terme del numerador:

$$\begin{aligned}2(x^2 - 3x)(x - 1) &= 2(x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x) \\&= 2x^3 - 8x^2 + 6x\end{aligned}$$

3. Restant:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3) - (2x^3 - 8x^2 + 6x)}{(x-1)^4} \\&= \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 - 2x^3 + 8x^2 - 6x}{(x-1)^4} \\&= \frac{(8x^2 - 7x^2) + (8x - 6x) - 3}{(x-1)^4} \\&= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)^4}\end{aligned}$$

Factoritzem el numerador:

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

Per tant:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^4} \\&= \frac{x+3}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

Anàlisi de la derivada

La funció $f(x)$ és creixent o decreixent segons el signe de $f'(x)$.

- $f'(x) > 0$: La funció és creixent.
- $f'(x) < 0$: La funció és decreixent.

Determinem els intervals:

1. $f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3}$

- El signe de la derivada depèn del numerador $x + 3$ i del denominador $(x - 1)^3$.
- El denominador $(x - 1)^3$ canvia de signe a $x = 1$, i és positiu per $x > 1$ i negatiu per $x < 1$. Per $x = 1$, no es defineix la derivada (asímtota vertical).
- El numerador $x + 3$ canvia de signe a $x = -3$.

Intervals de creixement i decreixement:

1. Per a $x < -3$:

$$x + 3 < 0 \text{ i } (x - 1)^3 < 0$$

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3} > 0$$

La funció és creixent.

2. Per a $-3 < x < 1$:

$$x + 3 > 0 \text{ i } (x - 1)^3 < 0$$

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3} < 0$$

La funció és decreixent.

3. Per a $x > 1$:

$$x + 3 > 0 \text{ i } (x - 1)^3 > 0$$

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3} > 0$$

La funció és creixent.

Resum:

- **Intervals de creixement:**
 - $(-\infty, -3)$
 - $(1, \infty)$
- **Intervals de decreixement:**
 - $(-3, 1)$

d) Els màxims i mínims locals, si n'hi ha.

(2 punts)

1. Trobar els punts crítics

Ja hem calculat la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3}$$

Els punts crítics es troben on $f'(x) = 0$ o on la derivada no està definida.

Derivada primera igualada a zero:

$$\frac{x+3}{(x-1)^3} = 0$$

El numerador ha de ser zero:

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

A $x = -3$, la derivada és zero. Hem de verificar aquest punt en el domini de la funció. Com que $x = -3$ està dins del domini (excloent $x = 1$), el punt $x = -3$ és un candidat per a màxims o mínims locals.

Derivada primera no definida:

La derivada no està definida quan el denominador és zero, és a dir, quan $x = 1$. No obstant això, $x = 1$ és una asímptota vertical, així que no es considera un màxim o mínim local.

2. Determinar la naturalesa del punt crític $x = -3$

Utilitzarem la segona derivada $f''(x)$ per determinar la naturalesa del punt crític. Calcularem la segona derivada utilitzant la derivada primera que ja hem trobat:

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3}$$

Per trobar la segona derivada $f''(x)$, utilitzarem la regla del quocient:

$$f''(x) = \frac{(u''(x)v(x) - 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x))}{v(x)^2}$$

On $u(x) = x + 3$ i $v(x) = (x - 1)^3$.

Calculem $u''(x)$, $v''(x)$, i $v'(x)$:

- $u'(x) = 1$
- $u''(x) = 0$
- $v(x) = (x - 1)^3$
- $v'(x) = 3(x - 1)^2$
- $v''(x) = 6(x - 1)$

Aplicant la regla del quocient:

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot 1 \cdot 3(x-1)^2 + (x+3) \cdot 6(x-1)}{(x-1)^6}$$

Simplificant:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-6(x-1)^2 + 6(x+3)(x-1)}{(x-1)^6} \\ &= \frac{-6(x-1)^2 + 6(x^2 - 1 + 3x - 3)}{(x-1)^6} \\ &= \frac{-6(x-1)^2 + 6x^2 + 18x - 24}{(x-1)^6} \\ &= \frac{-6(x^2 - 2x + 1) + 6x^2 + 18x - 24}{(x-1)^6} \\ &= \frac{-6x^2 + 12x - 6 + 6x^2 + 18x - 24}{(x-1)^6} \\ &= \frac{30x - 30}{(x-1)^6} \\ &= \frac{30(x-1)}{(x-1)^6} \\ &= \frac{30}{(x-1)^5} \end{aligned}$$

Avaluem la segona derivada a $x = -3$:

$$f''(-3) = \frac{30}{(-3-1)^5} = \frac{30}{(-4)^5} = \frac{30}{-1024} < 0$$

Com que $f''(-3) < 0$, el punt $x = -3$ és un màxim local.

Resum

- Punt crític: $x = -3$

- Funció en $x = -3$:

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - 3(-3)}{(-3-1)^2} = \frac{9+9}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

- Màxim local: $\left(-3, \frac{9}{8}\right)$
- No hi ha mínims locals.

e) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats anteriors. (2 punts)

1. Domini:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

La funció no està definida en $x = 1$.

2. Asímtotes:

- Vertical: $x = 1$
- Horitzontal: $y = 1$

3. Intervals de creixement i decreixement:

- Creixent: $(-\infty, -3)$ i $(1, \infty)$
- Decreixent: $(-3, 1)$

4. Màxim local:

- Punt màxim local: $(-3, \frac{9}{8})$

5. Punts de tall amb els eixos:

- Eix x : $(0, 0)$ i $(3, 0)$
- Eix y : $(0, 0)$

Dibuix Esquemàtic

Per representar la gràfica de la funció:

1. Eixos:

- Dibuixa els eixos x i y .

2. Punts de tall:

- Marca els punts $(0, 0)$ i $(3, 0)$ en l'eix x .
- Marca el punt $(0, 0)$ en l'eix y (que és el mateix punt de tall amb l'eix x).

3. Asímptotes:

- Dibuixa una línia vertical discontinuada a $x = 1$.
- Dibuixa una línia horitzontal discontinuada a $y = 1$.

4. Màxim local:

- Marca el punt $(-3, \frac{9}{8})$.

5. Intervals de creixement i decreixement:

- En $(-\infty, -3)$, la funció és creixent.
- En $(-3, 1)$, la funció és decreixent.
- En $(1, \infty)$, la funció torna a créixer.

6. Comportament als extrems:

- Quan $x \rightarrow \pm\infty$, la funció s'apropa a $y = 1$ (asímtota horitzontal).

7. Comportament a prop de l'asímtota vertical:

- Quan x s'aproxima a 1 des de l'esquerra ($x \rightarrow 1^-$), $f(x) \rightarrow -\infty$.
- Quan x s'aproxima a 1 des de la dreta ($x \rightarrow 1^+$), $f(x) \rightarrow +\infty$.

Representació Gràfica

Aquí tens una representació esquemàtica per dibuixar la gràfica de la funció:

Gràfica de $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2}$

