

3. Sigui $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa

pel punt $A = (0, 3)$.

a) Calculeu la funció $f(x)$.

[1,5 punts]

$$\text{a) Integrant } f(x) = \begin{cases} \int (x-1)dx & \text{si } x < 2 \\ \int \frac{1}{x-1}dx & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + k & \text{si } x < 2 \\ \ln|x-1| + k' & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Troblem els valors de les constants k i k' :

- $f(x)$ passa pel punt $A = (0,3)$, per tant, $\frac{1}{2}0^2 - 0 + k = 3 \rightarrow k = 3$.
- Com que $f(x)$ és derivable, llavors és contínua, així que ho és en el punt d'abscissa 2 i, per tant, els límits laterals de la funció $f(x)$ en 2 han de coincidir:

$$\frac{1}{2}2^2 - 2 + 3 = \ln|2-1| + k'$$

$$k' = 3.$$

Per tant, la funció $f(x)$ serà $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln|x-1| + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f'(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
[1 punt]

Apliquem l'equació de la recta tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa a :

$$y - g(a) = g'(a) \cdot (x - a)$$

Ara la funció és f' és $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ i $a = 3$.

Cal trobar $g'(x)$, $g'(3)$ i $g(3)$:

$$g'(x) = f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}, \quad g'(3) = -\frac{1}{4}, \quad g(3) = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$