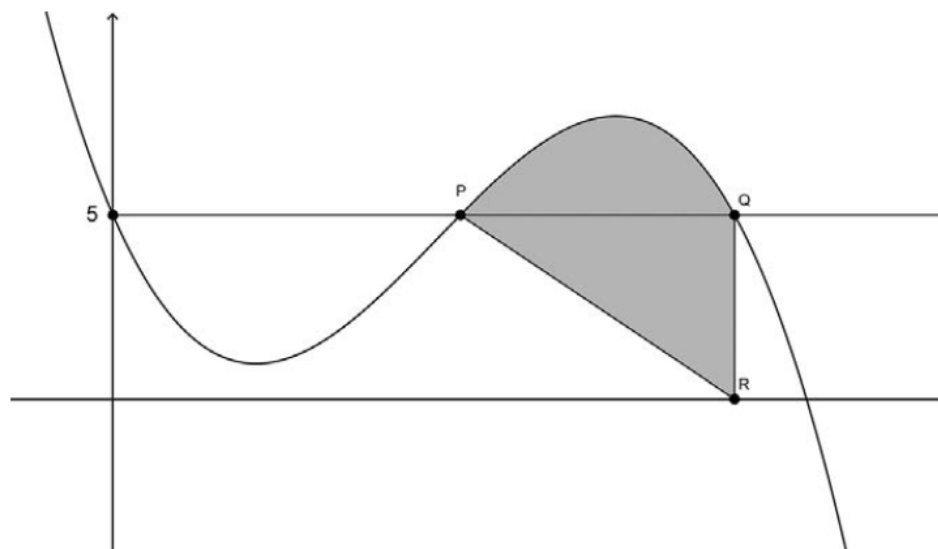


3. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

- a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P , Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR .

[1,25 punts]

Tal com es veu al dibuix, les abscisses dels punts $(0, 5)$, P , i Q són les tres solucions de l'equació $f(x) = 5$:

$$-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \rightarrow x(-x^2 + 7x - 6) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}.$$

Per tant, les coordenades dels punts demanats són $P = (1, 5)$, $Q = (6, 5)$, i $R = (6, 0)$.

Ara, la recta r que passa pels punts $P = (1, 5)$ i $R = (6, 0)$ té pendent $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$, per tant és $y = -x + n$ i, com que passa pel punt $R = (6, 0)$, tenim que $n = 6$; es tracta de la recta $y = -x + 6$.

b) Calculeu la superfície del terreny.

[1,25 punts]

La superfície del terreny serà la integral definida entre els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 6$ de la funció $f(x)$ menys la recta:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^6 (f(x) - r(x)) dx = \\ &= \int_1^6 ((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)) dx = \\ &= \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x \right]_1^6 = \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - \frac{5}{2}6^2 - 6 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2} - 1 \right) = \frac{1025}{12} = 85.416 \dots u^2.$$

Alternativament, es pot integrar només $f(x)$ entre 1 i 6, i restar el triangle inferior no inclòs al terreny:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^6 f(x) dx - \frac{5 \cdot 5}{2} = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) dx - \frac{25}{2} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_1^6 - \\ &\frac{25}{2} = \left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7}{3}6^3 - 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - 3 + 5 \right) - \frac{25}{2} = \frac{1175}{12} - \frac{25}{2} = 85.416 \dots u^2. \end{aligned}$$