

3. Sigui la recta r definida per l'expressió següent:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- a) Determineu la posició relativa de la recta r respecte al pla $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si és paral·lela, calculeu la distància de r a π , i si és secant, calculeu el punt de tall.
[1,25 punts]

Comprovem si la recta r es troba continguda en el pla substituint el punt

$P(2, -1, 3) \in r$ en l'equació del pla π : $2 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 - 4 = 12 \neq 0$; llavors no està continguda al pla.

Comprovem si la recta és paral·lela al pla. El producte escalar del vector normal al pla i el vector director de la recta hauria de ser nul ja que serien perpendiculars:

$(1, 3, 1) \cdot (1, -2, 4) = 1 - 6 + 4 \neq 0$; llavors no són paral·lels.

Així doncs, la recta r és secant al pla π .

El punt de tall entre la recta i el pla es pot calcular substituint x, y i z de la recta dins l'equació del pla:

$$(2 + \lambda) - 2(-1 + 3\lambda) + 4(3 + \lambda) - 4 = 0$$

$$2 + \lambda + 2 - 6\lambda + 12 + 4\lambda - 4 = 0 \rightarrow -\lambda + 12 = 0 \rightarrow \lambda = 12$$

El punt de tall és: $(2 + 12, -1 + 3 \cdot 12, 3 + 12) =$ $(14, 35, 15)$.

Observació: També es pot plantejar directament el sistema format per la recta i el pla per trobar la intersecció, estudiar-lo i resoldre'l.

b) Calculeu l'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talla la recta r en un punt P , la primera coordenada del qual és 5 vegades més gran que la segona.

[1,25 punts]

L'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talli la recta r en el punt P té per vector director el vector normal al pla: $\vec{v} = (1, -2, 4)$.

El punt P ha de satisfer que:

$$2 + \lambda = 5 \cdot (-1 + 3\lambda) \rightarrow 2 + \lambda = -5 + 15\lambda \rightarrow 7 = 14\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Lavors el punt P és $(2 + 1/2, -1 + 3/2, 3 + 1/2) = (5/2, 1/2, 7/2)$ i la recta és:

$$\boxed{(x, y, z) = (5/2, 1/2, 7/2) + \mu(1, -2, 4)}$$

S'accepta l'equació de la recta en qualsevol format que també sigui correcte.