

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{array} \right\},$$

en què m és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m .

[1,25 punts]

Per a discutir el sistema d'equacions lineals calculem el determinant de la matriu dels coeficients A , per a calcular-ne el rang.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (2m^2 + 2(m-3)) - (6m + 2(m-3)) = 2m^2 - 6m.$$

$$|A| = 0 \rightarrow 2m(m-3) = 0 \rightarrow \begin{matrix} m = 0 \\ m = 3 \end{matrix}$$

I per tant podem organitzar la discussió en tres casos.

- Cas I: $m \neq 0$ i $m \neq 3$

$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A | b)$ = nombre d'incògnites i pel Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema és compatible i determinat, amb una sola solució, SCD.

- Cas II: $m = 0$

Com que $|A| = 0$ tenim que $\text{rang}(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

La matriu ampliada és:

$$A | b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 : 0 \\ 0 & 0 & 3 : -6 \\ 2 & -1 & 0 : 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 : 0 \\ 0 & 0 & 3 : -6 \\ 0 & 0 & -3 : 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 : 0 \\ 0 & 0 & 3 : -6 \\ 0 & 0 & 0 : 0 \end{pmatrix}$$

Per tant $\text{rang}(A) = \text{rang}(A | b) = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant és un SCI (sistema compatible indeterminat amb $3 - 2 = 1$ variable lliure, té infinites solucions).

- Cas III: $m = 3$

Com que $|A| = 0$ tenim que $\text{rang}(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

La matriu ampliada és:

$$A | b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 : 0 \\ 0 & 3 & 0 : -6 \\ 2 & -1 & 3 : 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 : 1 \\ 0 & 3 & 0 : -6 \\ 0 & 0 & 0 : 6 \end{pmatrix}$$

I per tant tenim $\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A | b) = 3$. Per tant, tenim un SI (sistema incompatible), no té solució.

- b) Resoleu el sistema, si és possible, quan $m = 0$ i quan $m = 3$. En cada cas, doneu la posició relativa dels tres plans a $\mathbb{R}^3$.

[1,25 punts]

- Si $m = 0$, la matriu ampliada és:

$$A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 3 & : & -6 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Recta } r: \begin{cases} x = k \\ y = 2k - 6, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$$

Veient els vectors normals dels tres plans: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 3 & : & -6 \\ 2 & -1 & 0 & : & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi_1} = (2, -1, 3) \\ n_{\pi_2} = (0, 0, 3) \\ n_{\pi_3} = (2, -1, 0) \end{matrix}$.

Per tant, els tres plans es tallen en la recta r .

- Si $m = 3$ ja hem vist que el sistema no té solució, és a dir que no hi ha cap punt intersecció dels 3 plans.

La posició relativa dels tres plans ens la dona els seus vectors normals i els termes independents:

$$A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & : & 0 \\ 0 & 3 & 0 & : & -6 \\ 2 & -1 & 3 & : & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi_1} = (2, -1, 3) \\ n_{\pi_2} = (0, 3, 0) \\ n_{\pi_3} = (2, -1, 3) \end{matrix}$$

són proporcionals els plans π_1 i π_3 són paral·lels i estan tallats pel pla π_2 .