

3. Considereu les rectes a l'espai $r: x = -y = z + m$ i $s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$, en què m és un paràmetre real.

a) Estudieu la posició relativa per als diferents valors del paràmetre m .

[1,25 punts]

Determinem el vector director i un punt de cada recta:

$$r: x = -y = z + m \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ P(0, 0, -m) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 1, 0) \times (1, 0, -1) = (-1, 1, -1) \\ x = 1 \Rightarrow Q(1, 0, 1) \end{cases}$$

Com que $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ els vectors directors de r i s són linealment dependents i les rectes seran o bé coincidents o bé paral·leles. Si són coincidents tenen tots els punts en comú, en concret $Q \in s$.

Comprovem si $Q \in r$: $1 \neq -0 = 1 + m$

Com que no se satisfà per cap valor de m , podem assegurar que les rectes sempre seran paral·leles independentment de m .

b) Calculeu m perquè la distància entre les rectes r i s sigui de $\sqrt{2}$ unitats.

[1,25 punts]

Calculem la distància entre les dues rectes:

$$d(P, S) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1+m \end{vmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{|(1+m, m, -1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(1+m)^2 + m^2 + 1}}{\sqrt{3}}$$

Calculem el valor de m per tal que sigui $\sqrt{2}$:

$$d(P, S) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1+m)^2 + m^2 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow (1+m)^2 + m^2 + 1 = 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0$$

D'on s'obtenen les solucions $m = 1$ i $m = -2$.