

3. Considereu les paràboles $y = f_a(x)$, amb $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$, on a és un paràmetre real.
- a) Determineu el valor del paràmetre a per al qual la recta tangent a $y = f_a(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ passa pel punt $(2, 13)$.
- [1 punt]

La derivada és $f'_a(x) = 2ax + 2$ i el pendent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $f'_a(1) = 2a + 2$. Com que el punt de tangència és $(1, f_a(1)) = (1, 7)$, l'equació de la recta tangent serà $y - 7 = (2a + 2)(x - 1)$. Per tal que aquesta recta passi pel punt $(2, 13)$ cal que $13 - 7 = (2a + 2)(2 - 1)$, és a dir, $6 = 2a + 2$ i, per tant, $a = 2$.

- b) Calculeu els punts de tall de les paràboles $y = f_1(x)$ i $y = f_3(x)$.

[0,5 punts]

(b) Per trobar els punts de tall d'aquestes dues paràboles, hem de resoldre l'equació de segon grau $f_1(x) = f_3(x)$:

$$x^2 + 2x + 4 = 3x^2 + 2x + 2 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm 1.$$

Els punts de tall són $(1, f_1(1)) = (1, 7)$ i $(-1, f_1(-1)) = (-1, 3)$.

- c) Calculeu l'àrea de la regió situada entre les dues paràboles $y = f_1(x)$ i $y = f_3(x)$.

[1 punt]

L'àrea demanada és la integral

$$A = \int_{-1}^1 (f_1(x) - f_3(x)) dx = \int_{-1}^1 ((x^2 + 2x + 4) - (3x^2 + 2x + 2)) dx =$$
$$\int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{8}{3} u^2.$$