

4. Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ :

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ .

[1,25 punts]

a) Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre λ .

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2 + \lambda & 0 \\ 2 + \lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2 + \lambda & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Calculem el determinant de la matriu del sistema i estudiem per a quins valors el determinant s'anul·la.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2 + \lambda \\ 2 + \lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2 + \lambda & 1 \end{vmatrix} = 9\lambda^3 + 9 = 9(\lambda^3 + 1)$$

Quan resollem l'equació $9(\lambda^3 + 1) = 0$, obtenim $\lambda^3 = -1$ i d'aquí $\lambda = -1$.

Per tant, tenim dos casos a discutir.

CAS I: $\lambda \neq -1$

Com que $|M| \neq 0$, aleshores $\text{Rang } M = 3 = \text{Rang } \overline{M} = \text{Nombre d'incògnites}$.

En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible determinat (SCD) i, per tant, el sistema té una única solució.

CAS II: $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Com que $|M| = 0$, aleshores $\text{Rang } M < 3$, però en tenir $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$, aleshores $\text{Rang } M = 2$.

D'altra banda, si orlem l'anterior menor, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 3 - 6 = 0$, per tant, $\text{Rang } \overline{M} = 2$.

Aleshores, com que $\text{Rang } M = 2 = \text{Rang } \overline{M} < \text{Nombre d'incògnites} = 3$, es tracta d'un sistema compatible indeterminat (SCI) amb 1 (3-2) grau de llibertat.

Observació: de forma alternativa, el primer determinant es podria haver calculat utilitzant les propietats dels determinants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 3+3\lambda & 3+3\lambda & 3+3\lambda \end{vmatrix} = (3+3\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+\lambda)(3\lambda^2 - 3\lambda + 3) = 9(1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

(*) Sumant a la tercera fila les dues primeres files.

b) Per al cas $\lambda = -1$, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.

[1,25 punts]

Estudiem el cas $\lambda = -1$.

Sabem que es tracta d'un SCI amb un grau de llibertat i el menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar:

$$\begin{cases} x - 2y = -z \\ x + y = 3 + 2z \end{cases}$$

Ara podem resoldre aplicant el mètode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 3+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z+6}{3} = z+2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 3+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+3z}{3} = z+1$$

Solució: $\boxed{(x = z + 2, y = z + 1, z \text{ paràmetre})}$

Interpretació geomètrica: cadascuna de les equacions és un pla a $\mathbb{R}^3$. El fet que la solució tingui un grau de llibertat ens indica que aquests tres plans es tallen en una recta, que és la formada per punts de la forma $(z+2, z+1, z)$.

Com que $(z+2, z+1, z) = (2,1,0) + z(1,1,1)$, la recta intersecció és la que passa pel punt $(2,1,0)$ i té vector director $(1,1,1)$.