

4. L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa.



- a) A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure la segona).

— Calculeu la probabilitat que la primera bola sigui una A o una E.

[0,5 punts]

— Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin diferents.

[0,75 punts]

- Donat que hi ha dues A i una E, en la primera extracció tenim 3 casos favorables sobre 9 possibles; per tant, la probabilitat demanada és $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

[0,5 punts]

- Calculem primer la probabilitat que les dues boles siguin iguals. Això només pot passar si són dues A o dues S.

$$P(\text{dues } A) = P(\text{primera } A \text{ i segona } A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(\text{dues } S).$$

Per tant, $P(\text{dues diferents}) = 1 - P(\text{dues iguals}) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944 \dots$

Alternativament, podem argumentar directament de la manera següent: si la primera bola no és ni A ni S, segur que les dues seran diferents; si la primera bola és una A, hi ha 7 boles favorables per a la segona extracció (totes menys l'altra A); i

anàlogament, si la primera bola és una S, hi ha també 7 boles favorables per a la segona extracció. Per tant,

$P(\text{dues diferents})$

$$\begin{aligned} &= P(\text{primera no és ni } A \text{ ni } S) + P(\text{primera } A \text{ i segona no } A) \\ &\quad + P(\text{primera } S \text{ i segona no } S) = \\ &= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

[0,75 punts]

b) L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrera l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar la següent).

— Calculeu la probabilitat que no hagi tret cap A.

[0,5 punts]

— Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A.

[0,75 punts]

El nombre de boles A extretes segueix una llei binomial amb $n = 5$ i $p = \frac{2}{9}$.

- $P(\text{cap A}) = (1 - p)^5 = \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0.284 \dots$

[0,5 punts]

- (ii) Passant al complementari, tenim

$$P(\text{almenys 2 A}) = 1 - P(\text{una A}) - P(\text{cap A}) = 1 - \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 =$$
$$= 0.308 \dots$$

[0,75 punts]