

4. a) Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt $(0, 5)$, que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.
[1 punt]

De la funció g tenim la informació següent: $g(0) = 5$, $g'(1) = 0$, $g''(x) = 2x + 1$.

Per tant, sabem que $g'(x) = x^2 + x + m$ on m és una constant real. Com que $g'(1) = 0$ deduïm que $m = -2$. Aleshores $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + n$ on n és una constant real. Com que $g(0) = 5$ deduïm que $n = 5$. Així tenim que

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$$

Observació: També és totalment correcte el plantejament inicial de

$g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ i imposant les condicions obtenir els valors respectius de a , b , c i d .

- b) Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval $(0, 4)$. Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1,5 punts]

La funció f és polinòmica i, per tant, contínua i derivable a tots els nombres reals. Comprovem fàcilment que $f(2) = 0$ i per tant $x = 2$ és una arrel de la funció.

Per comprovar si és estrictament creixent a l'interval indicat calculem la funció derivada $f'(x) = -3x^2 + 12x$, que s'anul·la per a $x = 0$ i $x = 4$.

Com que es tracta d'una paràbola amb coeficient principal negatiu deduïm que la derivada és estrictament positiva en l'interval $(0, 4)$ i, per tant, que la funció f és estrictament creixent en aquest interval. Això implica que la funció f no té més arrels en aquest interval i per tant l'àrea A demanada es pot calcular amb l'expressió següent:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 16) dx \right| + \left| \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16) dx \right| = \\ &= \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_0^2 \right| + \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_2^4 \right| = 20 + 20 = 40 \text{ u}^2. \end{aligned}$$