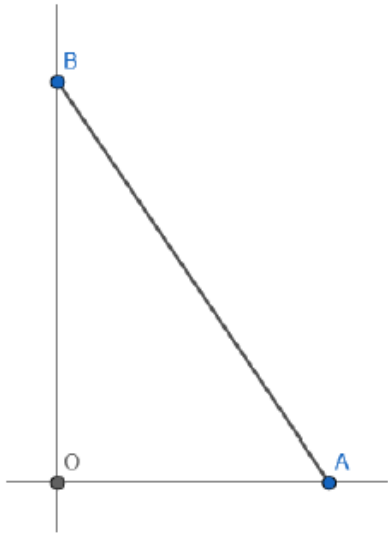


4. A $\mathbb{R}^2$, considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ i $B = (0, y)$, amb $x > 0$ i $y > 0$, i en què la suma dels catets és 10.

a) Expresseu l'àrea del triangle AOB en funció de x . Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?

[1,25 punts]



Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$\text{Àrea} = \boxed{A(x)} = \frac{x(10 - x)}{2} = \boxed{\frac{10x - x^2}{2}}$$

$$A'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$$

$$A''(x) = -1$$

$A' = 0$ quan $x = 5$. $A''(5) = -1 < 0$. Per tant, l'àrea és màxima quan $\boxed{x = 5}$.

En aquest cas l'àrea màxima és

$$\boxed{A(5) = 25/2 \text{ unitats de superfície.}}$$

- b) Expresseu la hipotenusa del triangle AOB en funció de x . Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?
[1,25 punts]

Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$\text{hipotenusa} = \boxed{H(x) = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

$$H'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

$$H'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}} = 0 \Leftrightarrow 2x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$H''(x) = \frac{2\sqrt{2x^2-20x+100} - (2x-10)\frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}}{2x^2-20x+100} = \frac{2(2x^2-20x+100) - (2x-10)^2}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}} = \frac{100}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}}$$

$H''(5) > 0$ per tant $\boxed{\text{la funció hipotenusa té un mínim quan } x = 5}$.

El valor mínim de la hipotenusa serà $\boxed{H(5) = 5\sqrt{2} \text{ unitats de longitud}}$.

Observació: L'estudiant també pot optar, de forma justificada, per fer mínima la funció $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$, prescindint de l'arrel quadrada, fet que simplifica els càlculs. Això és possible atès que la funció arrel quadrada es monòtona creixent, de manera que no es modifiquen els valors de les abscisses on s'assoleixen els màxims i mínims de la funció.