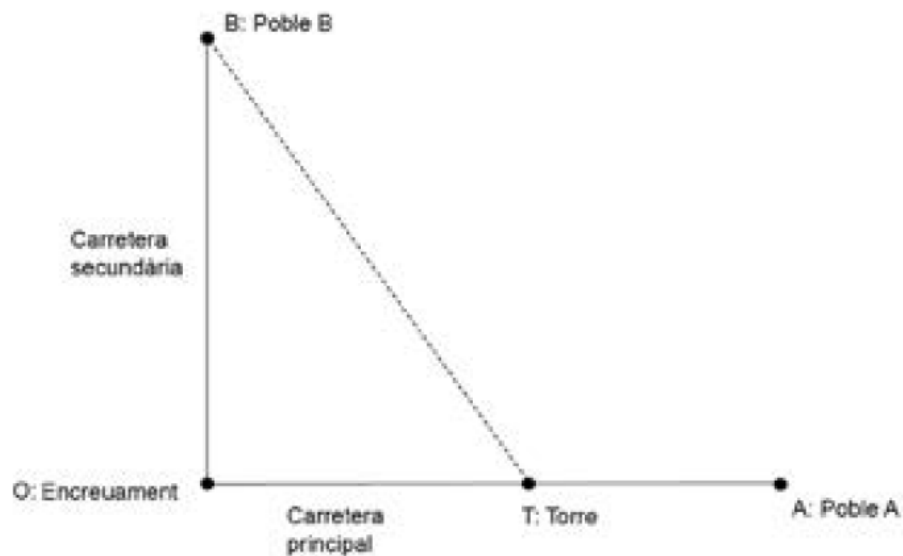
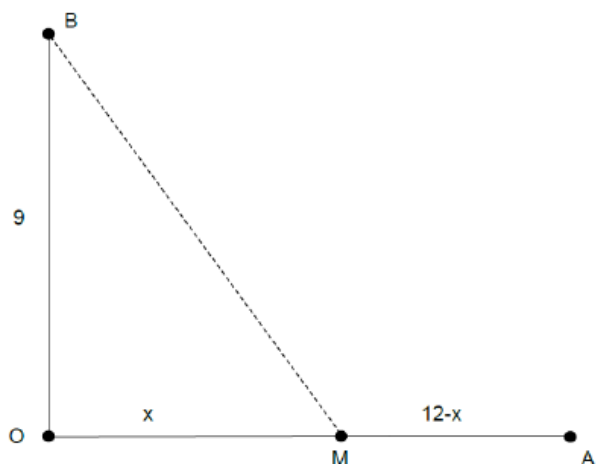


4. En una carretera principal hi trobem el poble A . A 12 km del poble A , hi ha un encreuament O amb una carretera secundària que talla perpendicularment la carretera principal. A 9 km de l'encreuament, a la carretera secundària, hi trobem el poble B . Es vol construir una torre de comunicacions T en un punt de la carretera principal situat entre el poble A i l'encreuament O . Aquesta torre ha d'estar connectada amb cadascun dels dos pobles en línia recta per cable. Sabem que instal·lar el cable entre la torre T i el poble B té un preu de 250 €/km i, en canvi, instal·lar el cable entre la torre T i el poble A té un preu de 125 €/km. Determineu a quina distància de l'encreuament O a la carretera principal cal situar la torre T perquè el preu del cablejat sigui mínim i quin serà el valor d'aquest preu mínim.

[2,5 punts]



Si denotem per x la distància de l'encreuament a la torre, és a dir, $x = d(O, M)$, aleshores obtenim



Pel teorema de Pitàgores veiem que $d(B, M) = \sqrt{81 + x^2}$.

Així doncs el preu del cablejat serà vindrà donat per la funció

$$P(x) = 125(12 - x) + 250\sqrt{81 + x^2}.$$

Per trobar el preu mínim derivem la funció P :

$$P'(x) = -125 + 250 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{81 + x^2}}$$

Resolent $P'(x) = 0$ obtenim $\sqrt{81 + x^2} = 2x$, i elevant les dues bandes al quadrat tenim

$81 + x^2 = 4x^2$, que té com a solució real positiva $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ km. Per comprovar que és un mínim estudiem el signe de la derivada als intervals $(0, 3\sqrt{3})$ i $(3\sqrt{3}, 12)$. En el primer cas $P'(x) < 0$ i en el segon cas $P'(x) > 0$, per tant deduïm que el mínim de la funció P s'assoleix per a $x = 3\sqrt{3}$ km, és a dir, situant la torre a $3\sqrt{3}$ km = 5,2 km de l'encreuament.