

4. La Rut fa servir el mètode següent per a fer els problemes de matemàtiques: tira un dau equilibrat i, si el resultat és com a màxim 4, pensa i resol el problema ella mateixa; si el resultat és 5 o 6, busca la solució del problema per Internet i la copia. Quan és ella qui ha pensat la solució, la resposta és correcta en el 75 % dels casos; quan copia la solució d'Internet, la resposta és correcta només en el 40 % dels casos.
- a) Quina és la probabilitat que la solució d'un problema respost seguint aquest mètode sigui correcta?
[0,75 punts]

Denotem per C l'esdeveniment "la solució és correcta", per R l'esdeveniment "l'ha resolt la Rut", i per I l'esdeveniment "l'ha copiat d'Internet". Segons l'enunciat, $P(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(I) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(C | R) = 0.75$, i $P(C | I) = 0.4$. Aleshores, per la llei de les probabilitats totals,

$$P(C) = P(C | R)P(R) + P(C | I)P(I) = 0.75 \cdot \frac{2}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.633 \dots$$

- b) Quina és la probabilitat que un problema l'hagi resolt la Rut si sabem que la solució és correcta?
[0,75 punts]

Fent servir la fórmula de Bayes i els càlculs de l'apartat anterior, obtenim

$$P(R | C) = \frac{P(C|R)P(R)}{P(C)} = \frac{0.75 \cdot \frac{2}{3}}{0.633} = 0.789 \dots$$

- c) Demà la Rut ha d'entregar 5 problemes de matemàtiques. Quina és la probabilitat que n'hi hagi almenys 4 de correctes?
[1 punt]

El nombre d'exercicis correctes segueix una distribució binomial amb $p = P(C) = 0.633$ i $n = 5$.

$$\begin{aligned} P(\text{almenys 4 correctes}) &= P(4 \text{ correctes}) + P(5 \text{ correctes}) = \\ &= \binom{5}{4} \cdot 0.633^4 \cdot (1 - 0.633)^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.633^5 = 0.396 \dots \end{aligned}$$