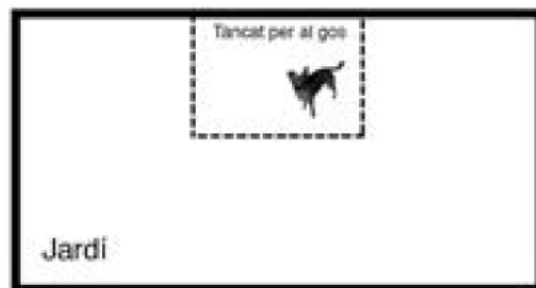


5. La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m^2 per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats.



El preu de la tanca que vol fer servir és de $2,5 \text{ €/m}$.

- a) Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?

[1,75 punts]

a) El tancat té forma de rectangle. Anomenem x a la base del rectangle i y a l'altura. Sabem que l'àrea del tancat és 8 m^2 , per tant, podem escriure:

$$x \cdot y = 8$$

Aïllant tenim que $y = \frac{8}{x}$.

El cost del tancat és $C(x, y) = 2,5 \cdot (2y + x)$. Substituint obtenim:

$$C(x) = 2,5 \cdot \left(2 \frac{8}{x} + x\right) = 2,5 \cdot \left(\frac{16 + x^2}{x}\right)$$

Per calcular el cost mínim, calcularem els extrems relatius de la funció $C(x)$, a partir de la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (16 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right)$$

$$2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm 4$$

Pel context del problema, només té sentit la solució positiva. Per comprovar si en $x = 4$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem el signe:

$$C''(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 16) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 32x)}{x^4}\right) = 2,5 \cdot \frac{32}{x^3}$$

Com que $C''(4) > 0$, en $x = 4$ hi ha un mínim.

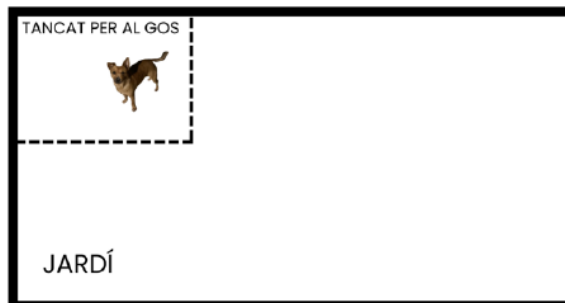
Per tant, les dimensions del tancat seran de 4 m de base i 2 m d'altura.

El cost serà: $C(4) = 2,5 \cdot \left(\frac{16+4^2}{4}\right) = \underline{20\text{€}}$

- b) Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.

[0,75 punts]

- b) Per estalviar amb la tanca, podem posar el tancat a una cantonada del jardí:



Ara podem reproduir els càlculs fets a l'apartat a, amb la nova situació.

En aquest cas, el cost del tancat és $C(x, y) = 2,5 \cdot (y + x)$. Com que $y = \frac{8}{x}$:

$$C(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{8}{x} + x \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{8 + x^2}{x} \right)$$

Calculant la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (8 + x^2) \cdot 1}{x^2} \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2} \right)$$

$$2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2} \right) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

Anàlogament, l'única solució que té sentit és la positiva. Per comprovar si en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem que el seu signe és positiu:

$$C''(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 8) \cdot 2x}{x^4} \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 16x)}{x^4} \right) = 2,5 \cdot \frac{16}{x^3}$$

Com que $C''(2\sqrt{2}) > 0$, en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim.

L'altura del tancat serà $y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Per tant, el tancat tindrà forma quadrada de costat $2\sqrt{2} \approx 2,83$ m.

En aquest cas el preu mínim serà

$$C(2\sqrt{2}) = 2,5 \cdot \left(\frac{8 + (2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \right) = 2,5 \cdot \frac{16}{\sqrt{8}} = 2,5 \cdot 2\sqrt{8} = 14,14\text{€}$$

Per tant, tindriem un estalvi de $20 - 14,14 = 5,86\text{€}$