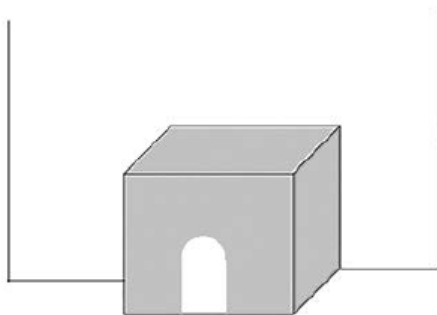


5. Volem construir un petit cobert de fusta de 6 m^3 de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



- a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35, \text{ on } x \text{ és la fondària del cobert en metres.}$$

[1,25 punts]

Com s'indica a l'enunciat, denotem per x la fondària del cobert, i denotem per h l'alçada; l'amplada serà $3x$. El volum del cobert ha de ser de 6 m^3 , és a dir, $3x \cdot x \cdot h = 6$ i per tant $h = \frac{2}{x^2}$. El cost de construcció és donat per

$$\begin{aligned} C(x) &= 30 \cdot (3xh + xh + xh) + 50 \cdot 3x^2 + 35 = 150xh + 150x^2 + 35 = \\ &= 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35. \end{aligned}$$

b) Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?

[1,25 punts]

Per minimitzar la funció $C(x)$, calculem la seva derivada:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

Si resollem l'equació $C'(x) = 0$ obtenim $\frac{300}{x^2} = 300x$ o, equivalentment, $x^3 = 1$, que té com a única solució real $x = 1$. Com que $C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300$ i $C''(1) > 0$, comprovem fàcilment que es tracta d'un mínim de la funció. Així doncs, les dimensions del cobert han de ser $x = 1$ metre de fondària, $3x = 3$ metres d'amplada, i $h = \frac{2}{1^2} = 2$ metres d'alçada. Per a aquestes dimensions el cost de construcció és de $C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$ euros.