

5. Sigui la matriu $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depèn dels paràmetres a , b i c .

a) Calculeu les matrius X tals que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,5 punts]

Calculem l'expressió de X^2 en funció dels paràmetres i la iguaem a la matriu donada:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'aquesta igualtat de matrius en sorgeixen les equacions següents:

$$a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

$$b^2 = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

$$c^2 = 1 \rightarrow c = \pm 1$$

$$a + b = 0 \rightarrow a = -b$$

$$b + c = 0 \rightarrow b = -c$$

Llavors, les solucions per a, b i c són:

$$a = 1, b = -1, c = 1 \quad \text{i} \quad a = -1, b = 1, c = -1$$

És a dir, hi ha dues possibles matrius X :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{i} \quad \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Determineu els valors de a, b i c perquè la matriu inversa de X sigui $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
[1 punt]

Només cal imposar que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicant obtenim la següent igual matricial.

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} \\ 0 & b & b - 1 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I igualant terme a terme els elements de la diagonal obtenim

$$\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2; \quad b = 1; \quad -c = 1 \rightarrow c = -1.$$

I també es compleix que $1 - \frac{a}{2} = 0$ per al valor $a = 2$, i $b - 1 = 0$ per al valor $b = 1$.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.

Observació: De forma alternativa també es pot calcular la matriu inversa X^{-1} i igualar-la a la matriu que ens dona l'enunciat.

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{abc} \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ -c & ac & 0 \\ 1 & -a & ab \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

I igualant els elements de la diagonal de les dues matrius, tenim que:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2; \quad \frac{1}{b} = 1 \rightarrow b = 1; \quad \frac{1}{c} = -1 \rightarrow c = -1$$

I també són certes les igualtats de la resta de termes de fora de la diagonal.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.