

5. Siguin els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ i $D = (1, 0, 1)$.

- a) Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
[1,25 punts]

Per a trobar els tres punts alineats calculem els vectors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (-1, -1, 0) \\ \overrightarrow{AD} &= D - A = (1, 0, 0)\end{aligned}$$

i com que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{AD}$, els tres punts alienats són: A, B i C .

La recta que defineixen està determinada, per exemple, pel punt $A = (0, 0, 1)$ i el vector director $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$. Per tant:

$$\text{Equació contínua: } r_{AB}: x = y = \frac{z - 1}{0}$$

$$\text{Equació paramètrica: } r_{AB}: \begin{cases} x = k \\ y = k, \\ z = 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

- b) Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.
[1,25 punts]

Busquem el pla π determinat pels punts A, B i D : el punt A i els vectors directores $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ determinen el pla. Si $X = (x, y, z)$ és un punt genèric del pla π tindrem

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolupant el determinant per Sarrus:

$$\pi: -(z - 1) = 0$$

Per tant l'equació general del pla és: $\pi: z = 1$.

Observació: De forma equivalent es pot trobar l'equació a partir del vector normal al pla $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 0, -1)$.