

5. Considereu la família S de matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, en què $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

[1,25 punts]

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Trobeu totes les matrius de la família S , és a dir, de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquin la igualtat $A^2 = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

[1,25 punts]

Calculem el quadrat d'una matriu de la família S i imposem que doni la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veiem que cal $2ab = 0$ i $a^2 + b^2 = 1$. Veiem que hi ha 4 solucions: $a = 0$ i $b = \pm 1$ i $a = \pm 1, b = 0$. Per tant les 4 matrius possibles són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$