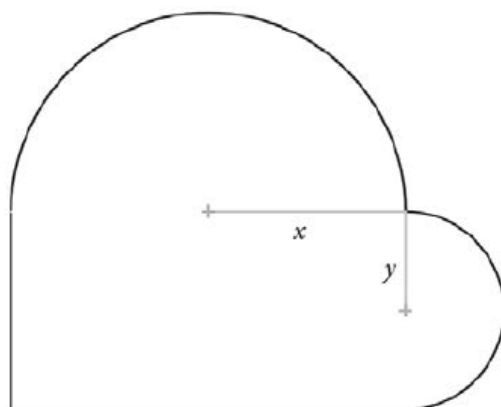


5. En Carles vol construir un decorat per a l'obra de teatre de final de curs en forma d'un rectangle i dos semicercles, tal com es mostra a la figura següent:



- a) Determineu el perímetre i l'àrea del decorat que s'ha de construir en funció de x i de y .
[1 punt]

Tal com s'indica a la figura, el radi de la semicircumferència superior és x , i el de la lateral y . Per tant, el perímetre de la figura serà

$$P(x, y) = 2x + 2y + \frac{2\pi x}{2} + \frac{2\pi y}{2} = (2 + \pi)(x + y),$$

i la seva àrea

$$A(x, y) = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} + 4xy.$$

- b) Per a revestir el perímetre del decorat, en Carles té material per a cobrir fins a 10 m. Si el vol gastar tot, quines seran les mides del decorat d'àrea màxima que podrà construir? Quin és el valor d'aquesta àrea?

[1,5 punts]

Com que volem $P(x, y) = (2 + \pi)(x + y) = 10$, tenim $y = \frac{10}{2+\pi} - x$. Substituint a l'expressió de l'àrea, obtenim:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{10}{2+\pi} - x \right)^2 + 4x \left(\frac{10}{2+\pi} - x \right) = \\ &= \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{10}{2+\pi} - x \right)^2 + \frac{40x}{2+\pi} - 4x^2. \end{aligned}$$

Derivant i igualant a zero, obtenim

$$\begin{aligned} A'(x) &= \pi x - \pi \left(\frac{10}{2+\pi} - x \right) + \frac{40}{2+\pi} - 8x = 0 \\ (2\pi - 8)x &= \frac{10\pi - 40}{\pi + 2} \\ x &= \frac{10\pi - 40}{(\pi + 2)(2\pi - 8)} = 0.972 \dots m. \end{aligned}$$

Ara comprovem que és un màxim, veient que $A'' = 2\pi - 8 < 0$. Per tant, el decorat de la màxima àrea possible és un quadrat de dimensions $x = 0.972 \dots m$, i $y = \frac{10}{2+\pi} - x = 0.972 \dots m$.

Finalment, el valor d'aquesta àrea màxima és $A(0.972) = 6.747 \dots m^2$.