

6. Siguin els plans π_1 i π_2 , determinats respectivament per les equacions $\pi_1: x + y = 3$ i $\pi_2: x - z = -2$.

a) Trobeu l'equació general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_3 , que és perpendicular a π_1 i π_2 , i que passa pel punt $P = (4, 1, 2)$.

[0,75 punts]

a) Com que el pla buscat és perpendicular a π_1 i π_2 , els seus vectors directores seran els vectors normals de π_1 i π_2 : $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ i $\vec{v}_2 = (1, 0, -1)$.

Troblem l'equació general del pla amb vectors directores $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ i que passa pel punt $P = (4, 1, 2)$, en què $X(x, y, z)$ és un punt genèric del pla:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{x - y + z - 5 = 0}$$

b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2 . Calculeu l'equació vectorial de la recta r .

[0,75 punts]

b) Busquem la solució del sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}$. Aïllant obtenim:

$$\begin{matrix} y = 3 - x \\ z = 2 + x \end{matrix} \rightarrow \text{Si } x = \lambda, \text{ tenim: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

La recta buscada en forma vectorial és:

$$\boxed{r: (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda \cdot (1, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}}$$

c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P .
[1 punt]

Troblem l'equació del pla perpendicular a la recta r i que passa pel punt P . Aquest és el pla que ens han demanat en l'apartat a: $x - y + z - 5 = 0$.

En cas que no ens adonem que ja tenim el pla d'un apartat anterior, aquest pla tindrà com a vector normal el vector director de la recta. Per tant, serà de la forma:

$$x - y + z + D = 0.$$

Imposem que P estigui contingut en el pla: $4 - 1 + 2 + D = 0 \rightarrow D = -5$.

Ara hem de calcular el punt de tall de la recta L i el pla:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \text{ i } x - y + z = 5 \rightarrow \lambda - (3 - \lambda) + (2 + \lambda) = 5 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ en les equacions paramètriques de la recta obtenim el punt :

$$\boxed{Q = (2, 1, 4)}.$$

De forma alternativa:

El punt Q és la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r , ja que és el punt que està a menor distància de P .

Sigui Q un punt genèric de la recta r : $Q = (\lambda, 3 - \lambda, 2 + \lambda)$ i $\vec{v} = (1, -1, 1)$ el vector director de L .

Per la condició d'ortogonalitat tenim que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$:

$$(-4 + \lambda, 2 - \lambda, \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0 \rightarrow -4 + \lambda - 2 + \lambda + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ al punt genèric Q obtenim les coordenades del punt: $\boxed{Q = (2, 1, 4)}$.