

6. Considereu els punts $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-3, -2, 3)$.

a) Calculeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta AB i que passa pel punt mitjà entre A i B . Justifiqueu que aquest pla està format, precisament, pels punts $P = (x, y, z)$ que estan a igual distància de A que de B , és a dir, $d(P, A) = d(P, B)$.

[1 punt]

El pla buscat ha de ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0) \sim (1, 1, 0)$, per tant, té equació de la forma $x + y + 0z + D = 0$. A més, ha de passar pel punt mitjà $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$; per tant, $-1 + D = 0$ i es tracta del pla d'equació $x + y + 1 = 0$.

Geomètricament és clar que aquest pla π està format, precisament pels punts a igual distància de A que de B . Efectivament, per a un punt arbitrari $P = (x, y, z)$, l'equació $d(P, A) = d(P, B)$ és equivalent a

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9,$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y,$$

$$-8x - 8y - 8 = 0$$

que simplificant-la és, precisament, l'equació del pla π , $x + y + 1 = 0$.

b) Calculeu les distàncies de A i de B al pla π i comproveu que són iguals. És casualitat? Raoneu la resposta.

[0,75 punts]

Usant la fórmula de la distància punt-pla, tenim

$$d(A, \pi) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad d(B, \pi) = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

No és casualitat que doni el mateix resultat: les projeccions ortogonals de A i de B al pla π són, precisament el punt mitjà $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$ per on hem fet passar el pla π , perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

- c) Sigui $C = (-7, 6, 3)$. El triangle ABC és isòsceles? Calculeu la seva àrea.
[0,75 punts]

El punt $C = (-7, 6, 3)$ compleix $-7 + 6 + 1 = 0$ i per tant pertany al pla π de l'apartat anterior. Això vol dir que $d(C, A) = d(C, B)$ i, per tant, el triangle ABC té almenys dos costats iguals; per tant, és isósceles.

Per calcular la seva àrea només necessitem la longitud de la base $d(A, B) = 2 \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, i la seva alçada, que és la distància de C al punt mitjà entre A i B :

$$h = d((-7, 6, 3), (-1, 0, 3)) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Per tant el triangle ABC té àrea

$$\text{Àrea} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2.$$