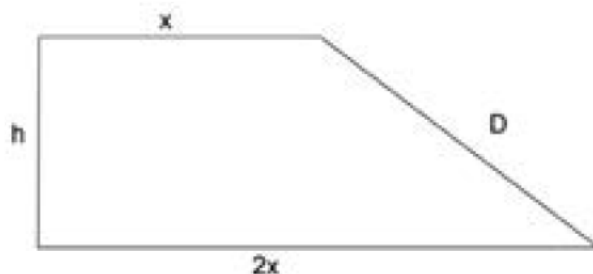


6. Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30 m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.



- a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents: $h = \frac{20}{x}$ i $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.
[1 punt]

L'àrea del trapezi és $A = \frac{3x}{2} \cdot h$ i utilitzant que l'àrea fa 30 m^2 obtenim $\boxed{h = \frac{20}{x}}$.

Observem que podem descomposar el trapezi en un rectangle de base x i altura h i un triangle rectangle d'hipotenusa D i catets x i h . Ara només cal aplicar el teorema de

Pitàgores a aquest triangle per obtenir $\boxed{D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$.

- b) Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat D és mínima.
[1,5 punts]

Per minimitzar la funció $D(x)$ derivem obtenint

$$D'(x) = \frac{\frac{-800}{x^3} + 2x}{2 \cdot \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}} = \frac{\frac{-400}{x^3} + x}{\sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$$

Resolem ara l'equació $D'(x) = 0$ o equivalentment $\frac{-400}{x^3} + x = 0$ i obtenim $x^4 = 400$ i, tenint en compte que només podem prendre les solucions positives, l'únic candidat a extrem és $x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Ara podem observar que en l'interval $(0, 2\sqrt{5})$ tenim $D'(x) < 0$ i, per tant, D és decreixent i que a l'interval $(2\sqrt{5}, +\infty)$ tenim $D'(x) > 0$ i, per tant, D és creixent, i, per tant, en $x = 2\sqrt{5}$ hi ha un mínim.

Així les dimensions que fan el costat oblic mínim són

$$\boxed{x = h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ m} \text{ i } D = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ m}}.$$

Observació: Per al càlcul del punt singular, també es pot procedir a derivar la funció $D^2(x) = \frac{400}{x^2} + x^2$, sempre que s'argumenti que tindrà localitzats els extrems en els mateixos valors de les abscisses.