

6. Sigui la funció $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$.

- a) Calculeu els valors dels paràmetres a i b si sabem que la gràfica de la funció f té un extrem relatiu en $x = -1$ i passa pel punt $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$.
[1,25 punts]

La funció derivada de $f(x)$ és $f'(x) = \frac{-x^2 + (2a - 2b)x + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Imposem la condició d'extrem relatiu $f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{-1 + 2b - 2a + 1}{4} = 0 \rightarrow a = b$

Imposem que la funció passi pel punt $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$

$$f(-2) = \frac{13}{5} \rightarrow \frac{4a - 2 + b}{5} = \frac{13}{5} \rightarrow 4a + b = 15$$

D'on es dedueix $a = b = 3$

- b) Per al cas $a = b$, calculeu i classifiqueu els extrems relatius de la funció.
[1,25 punts]

Per $a = b$ la derivada és $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Resolem $f'(x) = 0$ per trobar els possibles extrems relatius i obtenim $x = 1$, $x = -1$.

Com que $f'(-2) < 0$, $f'(0) > 0$, $f'(2) < 0$ deduïm que la funció té un mínim relatiu en $x = -1$ i un màxim relatiu en $x = 1$.