

6. Considereu les rectes $r: \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ i $s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases}$.

- a) Quina és la seva posició relativa? Calculeu l'equació implícita d'un pla π que sigui paral·lel a les dues rectes i que passi per l'origen de coordenades.

[1,25 punts]

La recta r té vector director $(4, 3, -1)$ i la recta s $(2, 1, 0)$. No són proporcionals, per tant, les rectes es creuen o es tallen. Donat que aquest determinant és diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 5-4 & 4-3 & 3-(-1) \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 - 2 - 24 + 1 - 0 = -9 \neq 0,$$

les rectes r i s es creuen.

Per ser paral·lel a les dues rectes, el pla π té la direcció formada pels seus dos vectors directors; com que, a més, ha de passar pel punt $(0, 0, 0)$, la seva equació implícita serà

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4z - 2y - 6z + x - 0 = x - 2y - 2z = 0.$$

- b) Calculeu l'equació de la recta t que talla les dues rectes r i s perpendicularment.
[1,25 punts]

Si partim del vector normal del pla π de l'apartat anterior, $v = (1, -2, -2)$, que és perpendicular a ambdues rectes, podem calcular l'equació del pla π_1 que conté el vector v i la recta r ,

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6(x-5) - 8(z-3) - (y-4) - 3(z-3) - 2(x-5) + \\ + 8(y-4) = -8x + 7y - 11z + 45 = 0,$$

i l'equació del pla π_2 que conté el vector v i la recta s ,

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-4) - 4(z+1) + 0 - (z+1) - 0 + 4(y-3) = \\ = -2x + 4y - 5z - 9 = 0.$$

La recta t que busquem és la que té per equació

$$\left. \begin{array}{l} 8x - 7y + 11z = 45 \\ 2x - 4y + 5z = -9 \end{array} \right\}.$$

Alternativament, podem prendre un punt genèric de la recta r , que és de la forma $R = (5, 4, 3) + \lambda(4, 3, -1)$, i un punt genèric de s , que és de la forma $S = (4, 3, -1) + \mu(2, 1, 0)$, i imposar que el vector

$$\overrightarrow{RS} = (4 + 2\mu, 3 + \mu, -1) - (5 + 4\lambda, 4 + 3\lambda, 3 - \lambda) = \\ = (-4\lambda + 2\mu - 1, -3\lambda + \mu - 1, \lambda - 4)$$

sigui perpendicular als vectors directors respectius, $(4, 3, -1)$ i $(2, 1, 0)$, de les rectes r i s . Obtenim el sistema d'equacions

$$4(-4\lambda + 2\mu - 1) + 3(-3\lambda + \mu - 1) - (\lambda - 4) = -26\lambda + 11\mu - 3 = 0,$$

$$2(-4\lambda + 2\mu - 1) + 1(-3\lambda + \mu - 1) + 0(\lambda - 4) = -11\lambda + 5\mu - 3 = 0.$$

Resolent-lo, obtenim $\lambda = 2$ i $\mu = 5$, que ens donen els punts buscats $R = (13, 10, 1) \in r$ i $S = (14, 8, -1) \in s$. Efectivament el vector $\overrightarrow{RS} = (1, -2, -2)$ és perpendicular a r i a s (és el vector normal del pla de l'apartat anterior) i l'equació de la recta t que passa per aquests dos punts és

$$\frac{x-13}{1} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z-1}{-2}.$$