

Problema 1. Una fàbrica ven diàriament dos models de bolígrafs de color verd. La fabricació del model senzill requereix una unitat de tinta i una altra de plàstic, mentre que el més sofisticat requereix una unitat de tinta i una i mitja de plàstic. La fàbrica disposa de 2 500 unitats de tinta i 3 000 de plàstic, i a més, se sap que no es poden fabricar més de 2 000 unitats de bolígrafs senzills. Per cada bolígraf senzill l'empresa guanya 0,5 euros i per cadascun dels sofisticats, 0,7 euros.

- a) Quantes unitats de cada tipus ha de produir la fàbrica per a maximitzar els guanys? (8 punts)

Per resoldre aquest problema, utilitzarem la programació lineal per maximitzar els guanys de la fàbrica. Anem a definir les variables i establir les restriccions:

Definició de variables

- x : nombre de bolígrafs senzills produïts.
- y : nombre de bolígrafs sofisticats produïts.

Funció objectiu

Volem maximitzar els guanys. La fàbrica guanya 0,5 euros per cada bolígraf senzill i 0,7 euros per cada bolígraf sofisticat. Així que la funció objectiu és:

Maximitzar $Z = 0,5x + 0,7y$

Restriccions

1. **Restricció de tinta:** Cada bolígraf, tant senzill com sofisticat, requereix una unitat de tinta. La fàbrica té un total de 2.500 unitats de tinta. Això es tradueix en la següent desigualtat:

$$x + y \leq 2500$$

2. **Restricció de plàstic:** Un bolígraf senzill requereix 1 unitat de plàstic i un bolígraf sofisticat requereix 1,5 unitats de plàstic. La fàbrica té un total de 3.000 unitats de plàstic. Això es tradueix en la següent desigualtat:

$$x + 1,5y \leq 3000$$

3. **Restricció de producció:** No es poden fabricar més de 2.000 unitats de bolígrafs senzills:

$$x \leq 2000$$

4. **Restriccions de no-negativitat:** El nombre de bolígrafs produïts no pot ser negatiu:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Resum del problema

Funció objectiu:

Maximitzar $Z = 0,5x + 0,7y$

Sota les condicions:

$$x + y \leq 2500$$

$$x + 1,5y \leq 3000$$

$$x \leq 2000$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Resolució

Podem resoldre aquest problema mitjançant mètodes gràfics o utilitzant una solució algorítmica com el mètode Simplex. Aquí es mostra un enfocament manual, utilitzant el mètode gràfic:

1. Dibuixar les restriccions en un gràfic:

- Restricció 1: $x + y \leq 2500$
 - Per $x = 0, y \leq 2500$
 - Per $y = 0, x \leq 2500$
- Restricció 2: $x + 1,5y \leq 3000$
 - Per $x = 0, y \leq 2000$
 - Per $y = 0, x \leq 3000$
- Restricció 3: $x \leq 2000$
 - Una línia vertical a $x = 2000$

2. Determinar la zona factible:

- L'espai que compleixi totes les desigualtats serà la zona factible.

3. Trobar els punts d'intersecció dels límits de la zona factible:

- Intersecció de $x + y = 2500$ i $x + 1,5y = 3000$:

$$x + y = 2500$$

$$x + 1,5y = 3000$$

$$y = 2500 - x$$

Substituïm en la segona equació:

$$x + 1,5(2500 - x) = 3000$$

$$x + 3750 - 1,5x = 3000$$

$$-0,5x = -750$$

$$x = 1500$$

$$y = 2500 - 1500 = 1000$$

Punt d'intersecció: (1500, 1000)

- Intersecció amb $x = 2000$:
 - Substituïm $x = 2000$ a les restriccions:

$$2000 + y \leq 2500 \Rightarrow y \leq 500$$

$$2000 + 1,5y \leq 3000 \Rightarrow 1,5y \leq 1000 \Rightarrow y \leq 666.67$$

Per tant, el punt d'intersecció és (2000, 500).

- Punt d'intersecció amb els eixos:
 - (0, 2000) (de la restricció de plàstic)

4. Avaluar la funció objectiu en cada punt d'intersecció:

- Per (1500, 1000):

$$Z = 0,5 \cdot 1500 + 0,7 \cdot 1000 = 750 + 700 = 1450$$

- Per (2000, 500):

$$Z = 0,5 \cdot 2000 + 0,7 \cdot 500 = 1000 + 350 = 1350$$

- Per (0, 2000):

$$Z = 0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 2000 = 0 + 1400 = 1400$$

Solució òptima

El màxim guany de 1450 euros es obté produint 1500 bolígrafs senzills i 1000 bolígrafs sofisticats.

Per tant, la fàbrica ha de produir 1500 bolígrafs senzills i 1000 bolígrafs sofisticats per maximitzar els guanys.

b) Quins són aquests guanys màxims?

(2 punts)

Punt òptim:

- Bolígrafs senzills: $x = 1500$
- Bolígrafs sofisticats: $y = 1000$

Funció objectiu:

$$Z = 0,5x + 0,7y$$

Substituïm x i y en la funció objectiu:

$$Z = 0,5 \cdot 1500 + 0,7 \cdot 1000$$

$$Z = 750 + 700$$

$$Z = 1450$$

Guanys màxims

El guany màxim que la fàbrica pot obtenir és **1450 euros**.

