

Problema 1. Es considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ en què k és un nombre real.

- a) Per a quins valors del paràmetre k la matriu A és invertible? (2 punts)

Per determinar per quins valors del paràmetre k la matriu A és invertible, hem de calcular el determinant de la matriu A i trobar quan és diferent de zero.

Càlcul del Determinant

El determinant de la matriu 3×3 A es calcula com segueix:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Expansió per la primera fila:

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

El primer terme és zero perquè la primera posició és zero, així que només hem de calcular els altres dos determinants 2×2 .

1. Determinant de la submatriu associada al segon terme:

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = k(-1) - 1 \cdot 2 = -k - 2$$

2. Determinant de la submatriu associada al tercer terme:

$$\begin{vmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = k(-1) - \frac{1}{3} \cdot 2 = -k - \frac{2}{3}$$

Substituïm aquests resultats en la fórmula original del determinant:

$$\det(A) = -k \cdot (-k - 2) + 3 \cdot \left(-k - \frac{2}{3}\right)$$

Simplifiquem:

$$\det(A) = k^2 + 2k + 3 \left(-k - \frac{2}{3}\right)$$

$$\det(A) = k^2 + 2k - 3k - 2$$

$$\det(A) = k^2 - k - 2$$

Perquè la matriu sigui invertible, el determinant ha de ser diferent de zero:

$$k^2 - k - 2 \neq 0$$

Resolució de l'Equació Quadràtica

Per trobar els valors de k per als quals el determinant és zero, resolguem l'equació quadràtica:

$$k^2 - k - 2 = 0$$

Podem resoldre aquesta equació utilitzant la fórmula general:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$k = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Així obtenim dues solucions:

$$k = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$k = \frac{1-3}{2} = -1$$

Conclusió

La matriu A és invertible per a tots els valors de k excepte $k = 2$ i $k = -1$.

b) Per a $k = 0$, si existeix, calculeu la matriu inversa de A .

(4 punts)

Matriu A Quan $k = 0$

La matriu A amb $k = 0$ és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinant de A

Calculeu el determinant de A utilitzant la primera fila:

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculeu el determinant de la matriu 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

Així:

$$\det(A) = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -2$$

Cofactors

Calculeu els cofactors de cada posició:

1. Cofactor $(1, 1)$

Eliminant la primera fila i la primera columna:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

Signe alternatiu: $(-1)^{1+1} = 1$

$$C_{11} = \frac{2}{3}$$

2. Cofactor (1, 2)

Eliminant la primera fila i la segona columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -2$$

Signe alternatiu: $(-1)^{1+2} = -1$

$$C_{12} = -(-2) = 2$$

3. Cofactor (1, 3)

Eliminant la primera fila i la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

Signe alternatiu: $(-1)^{1+3} = (-1)^4 = 1$

$$C_{13} = 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

4. Cofactor (2, 1)

Eliminant la segona fila i la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 3$$

Signe alternatiu: $(-1)^{2+1} = -1$

$$C_{21} = -3$$

5. Cofactor (2, 2)

Eliminant la segona fila i la segona columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -6$$

Signe alternatiu: $(-1)^{2+2} = 1$

$$C_{22} = -6$$

6. Cofactor (2, 3)

Eliminant la segona fila i la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 = 0$$

Signe alternatiu: $(-1)^{2+3} = -1$

$$C_{23} = 0$$

7. Cofactor (3, 1)

Eliminant la tercera fila i la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = -1$$

Signe alternatiu: $(-1)^{3+1} = 1$

$$C_{31} = -1$$

8. Cofactor (3, 2)

Eliminant la tercera fila i la segona columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 0$$

Signe alternatiu: $(-1)^{3+2} = -1$

$$C_{32} = 0$$

9. Cofactor (3, 3)

Eliminant la tercera fila i la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

Signe alternatiu: $(-1)^{3+3} = 1$

$$C_{33} = 0$$

Matriu de Cofactors

Amb els càlculs correctes, la matriu de cofactores és:

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu Adjunta

La matriu adjunta és la transposada de la matriu de cofactores:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu Inversa

Finalment, la matriu inversa és:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resum

Per a $k = 0$, la matriu inversa de A és:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Per a $k = 0$, trobeu les matrius diagonals D que verifiquen que $AD = DA$. (4 punts)

Matriu A Quan $k = 0$

La matriu A amb $k = 0$ és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trobar les Matrius Diagonals D

Volem trobar les matrius diagonals D que verifiquen que $AD = DA$. Una matriu diagonal D es pot escriure com:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Hem de complir que $AD = DA$, és a dir:

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot d_1 & 0 \cdot d_2 & 3 \cdot d_3 \\ 0 \cdot d_1 & \frac{1}{3} \cdot d_2 & 1 \cdot d_3 \\ 2 \cdot d_1 & -1 \cdot d_2 & -1 \cdot d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3d_3 \\ 0 & \frac{d_2}{3} & d_3 \\ 2d_1 & -d_2 & -d_3 \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \cdot 0 & d_1 \cdot 0 & d_1 \cdot 3 \\ d_2 \cdot 0 & d_2 \cdot \frac{1}{3} & d_2 \cdot 1 \\ d_3 \cdot 2 & d_3 \cdot -1 & d_3 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3d_1 \\ 0 & \frac{d_2}{3} & d_2 \\ 2d_3 & -d_3 & -d_3 \end{pmatrix}$$

Perquè $AD = DA$, els elements corresponents de les dues matrius resultant han de ser iguals:

1. $3d_3 = 3d_1$
2. $\frac{d_2}{3} = \frac{d_2}{3}$ (això és sempre cert)
3. $d_3 = d_2$
4. $2d_1 = 2d_3$
5. $-d_2 = -d_3$ (això és equivalent a $d_2 = d_3$)
6. $-d_3 = -d_3$ (això és sempre cert)

Dels elements 1 i 4, obtenim que:

$$d_1 = d_3$$

I de l'element 3 obtenim que:

$$d_2 = d_3$$

Per tant, totes les components diagonals són iguals:

$$d_1 = d_2 = d_3$$

Així, la matriu D és qualsevol matriu diagonal on tots els elements diagonals són iguals. Podem expressar D com:

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

on d és un nombre real qualsevol.

Resum

Per $k = 0$, les matrius diagonals D que verifiquen que $AD = DA$ són de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

on d és un nombre real qualsevol.