

P1. — Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) [3 punts] Calcula la matriu $M = A^T A - B B^T$, on A^T i B^T representen les matrius transposades de A i B respectivament.

Pas 1: Trobar A^T

La matriu transposada de A és:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pas 2: Calcular $A^T A$

Multipliquem A^T per A :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació:

$$A^T A = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) & (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) \\ (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) & (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pas 3: Trobar B^T

La matriu transposada de B és:

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas 4: Calcular BB^T

Multipliquem B per B^T :

$$BB^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació:

$$BB^T = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$BB^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas 5: Calcular $M = A^T A - BB^T$

Restem les dues matrius:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 2 - 0 \\ 2 - 0 & 2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) [3 punts] Justifica si M és o no invertible. En cas afirmatiu, resol els sistemes d'equacions

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per tal de calcular la inversa de la matriu M . Comprova que la matriu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

per als valors de a , b , c i d calculat, és la matriu inversa de M .

Per determinar si la matriu M és invertible i, en cas afirmatiu, trobar la seva inversa, seguirem aquests passos:

Matriu M

La matriu M és:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas 1: Calcular el Determinant

El determinant de M és:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1) - (2 \cdot 2) = 2 - 4 = -2$$

Pas 2: Trobar la Matriu Adjunta

La matriu adjunta (o cofactora) es calcula intercanviant els elements diagonals i canviant el signe dels elements no diagonals:

$$\text{Matriu Adjunta} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pas 3: Calcular la Inversa

Utilitzem la fórmula per la inversa d'una matriu 2×2 :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{Matriu Adjunta}$$

Substituïm el determinant i la matriu adjunta:

$$M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Distribuïm la fracció:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-2}{-2} & \frac{2}{-2} \end{pmatrix}$$

Simplifiquem:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Resoldre els Sistemes d'Equacions

Sistema 1:

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equacions:

1. $2a + 2c = 1$

2. $2a + c = 0$

Resolent per a i c :

De la segona equació:

$$c = -2a$$

Substituïm a la primera equació:

$$2a + 2(-2a) = 1$$

$$2a - 4a = 1$$

$$-2a = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$c = -2 \left(-\frac{1}{2} \right) = 1$$

Sistema 2:

$$M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Equacions:

1. $2b + 2d = 0$

2. $2b + d = 1$

Resolent per b i d :

De la primera equació:

$$d = -b$$

Substituïm a la segona equació:

$$2b - b = 1$$

$$b = 1$$

$$d = -1$$

Resultat

La matriu inversa M^{-1} és:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificació

Multipliquem M per M^{-1} per assegurar-nos que obtinguem la matriu identitat:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació:

$$\begin{aligned} M \cdot M^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{2} + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot -1 \\ 2 \cdot -\frac{1}{2} + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2 & 2 - 2 \\ -1 + 1 & 2 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprovem que la matriu inversa és correcta, ja que el resultat és la matriu identitat.

(c) [4 punts] Calcula la matriu X que compleix la igualtat $XM + A = C$.

Per resoldre la igualtat $XM + A = C$ per la matriu X , hem de seguir els passos següents:

Donades les Matrius

- Matriu M :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriu A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Matriu C :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Resoldre per X

Reescrivim l'equació $XM + A = C$ com:

$$XM = C - A$$

On:

$$C - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Realitzem la resta de matrius:

$$C - A = \begin{pmatrix} 2-1 & -2-1 \\ -2-(-1) & 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Així, tenim:

$$XM = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobar X

Per trobar X , hem de multiplicar XM per la inversa de M :

$$X = (C - A)M^{-1}$$

Ja hem calculat anteriorment la matriu inversa de M :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliquem $(C - A)$ per M^{-1} :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació:

$$X = \begin{pmatrix} (1 \cdot -\frac{1}{2}) + (-3 \cdot 1) & (1 \cdot 1) + (-3 \cdot -1) \\ (-1 \cdot -\frac{1}{2}) + (1 \cdot 1) & (-1 \cdot 1) + (1 \cdot -1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 3 & 1 + 3 \\ \frac{1}{2} + 1 & -1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{6}{2} & 4 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 4 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Resultat

La matriu X que compleix $XM + A = C$ és:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 4 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$