

P1. — Una empresa està considerant la fabricació de tres tipus d'armaris diferents, A , B i C . Disposa de metall i fusta.

- Per fabricar cada unitat del model A , es requereixen 5 kg de metall i 5 hores de treball d'un operari (no es requereix fusta).
- Per unitat del model B , 10 kg de metall, 10 kg de fusta i 10 hores de treball.
- Per unitat del model C , 15 kg de metall i 5 hores de treball (no es requereix fusta).

a) Si volem produir 10 unitats de cada tipus, quants de kg de cada material necessitam? (2 pt)

Definició de les Matrius

1. Matriu de consum de materials (A):

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

On:

- La primera fila representa el consum de metall per unitat de cada tipus d'armari.
- La segona fila representa el consum de fusta per unitat de cada tipus d'armari.
- La tercera fila representa el temps de treball per unitat de cada tipus d'armari.

2. Matriu de quantitat produïda (B):

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

On cada element representa el nombre d'unitats produïdes de cada tipus d'armari (Model A, Model B i Model C).

Multiplicació de Matrius

Per obtenir la matriu del consum total, hem de multiplicar la matriu de consum de materials M per la matriu de quantitat produïda B . Utilitzarem el símbol $\cdot$ per la multiplicació de matrius.

$$C = M \cdot B$$

Per calcular la matriu resultant C , realitzem la següent multiplicació:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Realitzem el càlcul per cada fila de la matriu M :

- Per al metall (primera fila de M):

$$C_1 = (5 \cdot 10) + (10 \cdot 10) + (15 \cdot 10) = 50 + 100 + 150 = 300$$

- Per a la fusta (segona fila de M):

$$C_2 = (0 \cdot 10) + (10 \cdot 10) + (0 \cdot 10) = 0 + 100 + 0 = 100$$

- Per al treball (tercera fila de M):

$$C_3 = (5 \cdot 10) + (10 \cdot 10) + (5 \cdot 10) = 50 + 100 + 50 = 200$$

Resultat Final

La matriu resultant C és:

$$C = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Així, el consum total necessari per produir 10 unitats de cada tipus d'armari és:

- 300 kg de metall
- 100 kg de fusta
- 200 hores de treball

- b) Si disposam de 1550 kg de metall, 600 kg de fusta i 1050 hores de treball d'operaris, quantes unitats de cada tipus hem de fabricar per utilitzar completament tots els recursos? (4 pt)

Sistema d'Equacions

Les equacions que necessitem resoldre són:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 600 \\ 1050 \end{pmatrix}$$

On:

- a és el nombre d'unitats de l'armari A,
- b és el nombre d'unitats de l'armari B,
- c és el nombre d'unitats de l'armari C.

Construcció de la Matriu Augmentada

Construïm la matriu augmentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 15 & 1550 \\ 0 & 10 & 0 & 600 \\ 5 & 10 & 5 & 1050 \end{array} \right]$$

Aplicació del Mètode de Gauss

1. Normalitzar la primera fila:

La primera fila ja està normalitzada amb un 5 a la primera columna. Dividim la primera fila per 5 per simplificar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 10 & 0 & 600 \\ 5 & 10 & 5 & 1050 \end{array} \right]$$

2. Eliminar els 5 de la tercera fila utilitzant la primera fila:

Subtraieu 5 vegades la primera fila de la tercera fila:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 5 \cdot R_1$$

On:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 10 & 0 & 600 \\ 5 - 5 \cdot 1 & 10 - 5 \cdot 2 & 5 - 5 \cdot 3 & 1050 - 5 \cdot 310 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 10 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & -10 & -500 \end{array} \right]$$

3. Normalitzar la tercera fila:

Dividim la tercera fila per -10:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 310 \\ 0 & 10 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array} \right]$$

4. Eliminar el terme de la tercera columna de la primera i segona fila:

Subtraieu 3 vegades la tercera fila de la primera fila:

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3 \cdot R_3$$

On:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 160 \\ 0 & 10 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array} \right]$$

5. Normalitzar la segona fila:

Dividim la segona fila per 10:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array} \right]$$

6. Eliminar el terme de la segona columna de la primera fila:

Subtraieu 2 vegades la segona fila de la primera fila:

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2 \cdot R_2$$

On:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array} \right]$$

Solució del Sistema

La matriu augmentada final mostra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array} \right]$$

Això indica que:

$$a = 40$$

$$b = 60$$

$$c = 50$$

Resultat Final

Per utilitzar completament els recursos disponibles:

- Nombre d'unitats de l'armari A (a): **40**
- Nombre d'unitats de l'armari B (b): **60**
- Nombre d'unitats de l'armari C (c): **50**

- c) Suposem ara que disposam de 1550 kg de metall, tota la fusta que necessitam (sense límit) i 1050 hores de treball, però per limitacions del magatzem només podem produir 125 unitats en total. En aquest cas, podem utilitzar completament el metall, les hores i el magatzem? (4 pt)

Per determinar si podem utilitzar completament els recursos disponibles (1550 kg de metall, 1050 hores de treball) i complir amb les restriccions de producció (màxim 125 unitats en total) amb les condicions donades, cal establir i resoldre el sistema d'equacions subjecte a les següents restriccions:

Variables

- x : Nombre d'unitats de l'armari A
- y : Nombre d'unitats de l'armari B
- z : Nombre d'unitats de l'armari C

Requisits i Restriccions

1. Consum de metall:

$$5x + 10y + 15z = 1550$$

2. Hores de treball:

$$5x + 10y + 5z = 1050$$

3. Número total d'unitats (màxim 125):

$$x + y + z \leq 125$$

4. Fusta disponible sense límit, així que no és necessari considerar-la com a restricció.

Pas 1: Simplificar el Sistema d'Equacions

Equació del metall:

$$5x + 10y + 15z = 1550$$

Dividim per 5:

$$x + 2y + 3z = 310 \quad (\text{Eq. 1})$$

Equació de les hores de treball:

$$5x + 10y + 5z = 1050$$

Dividim per 5:

$$x + 2y + z = 210 \quad (\text{Eq. 2})$$

Pas 2: Resoldre el Sistema d'Equacions

Resta l'Equació 2 de l'Equació 1 per eliminar la variable x :

$$(x + 2y + 3z) - (x + 2y + z) = 310 - 210$$

$$2z = 100$$

$$z = 50$$

Substituïm $z = 50$ a l'Equació 2 per trobar x i y :

$$x + 2y + 50 = 210$$

$$x + 2y = 160 \quad (\text{Eq. 3})$$

Pas 3: Considerar la Restricció del Nombre Total d'Unitats

La restricció del nombre total d'unitats és:

$$x + y + z \leq 125$$

Substituïm $z = 50$:

$$x + y + 50 \leq 125$$

$$x + y \leq 75$$

Pas 4: Resoldre per a x i y

Utilitzem l'Equació 3:

$$x + 2y = 160$$

i la restricció:

$$x + y \leq 75$$

Resolem aquestes dues equacions. De l'Equació 3, aïllem x :

$$x = 160 - 2y$$

Substituïm a la restricció:

$$160 - 2y + y \leq 75$$

$$160 - y \leq 75$$

$$-y \leq 75 - 160$$

$$-y \leq -85$$

$$y \geq 85$$

Verificar si el valor de y és vàlid

Si $y = 85$:

$$x = 160 - 2 \cdot 85$$

$$x = 160 - 170$$

$$x = -10$$

Com que x no pot ser negatiu, no hi ha solució vàlida amb $y \geq 85$. Això significa que no podem complir amb les restriccions donades amb els recursos disponibles i el límit de producció total.

Conclusió

No és possible utilitzar completament el metall, les hores de treball i mantenir el límit de producció de 125 unitats amb les condicions actuals. Per tant, no podem complir totes les condicions simultàniament.