

P1. — Una fàbrica de vi de Mallorca produeix 3 tipus de vi: negre, blanc i rosat. Amb la finalitat de saber el preu de cada tipus de vi, hem comprat vi, el mateix dia i a la fàbrica mateixa, de 4 maneres diferents:

- comprant 3 botelles de vi negre i 2 de vi blanc hem pagat 67 €,
- comprant 2 botelles de vi negre, 4 de vi blanc i 1 de rosat hem pagat 85 €,
- comprant 1 botella de vi negre i 1 de vi rosat hem pagat 21 €, i finalment,
- comprant 4 botelles de vi blanc i 5 de vi rosat hem pagat 85 €.

(a) [3 punts] Escriu, en forma matricial, el sistema d'equacions lineals que s'hauria de resoldre per poder descobrir el preu de cada tipus de vi.

Per escriure el sistema d'equacions lineals en forma matricial, primer definim les variables corresponents al preu de cada tipus de vi:

- x és el preu d'una botella de vi negre,
- y és el preu d'una botella de vi blanc,
- z és el preu d'una botella de vi rosat.

Les quatre situacions de compra es poden expressar com les següents equacions lineals:

1. $3x + 2y = 67$

2. $2x + 4y + z = 85$

3. $x + z = 21$

4. $4y + 5z = 85$

Ara podem escriure aquestes equacions en forma de matriu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

(b) [2 punts] És necessari tenir les dades de les 4 compres per saber el preu de cada tipus de vi? Justifica la resposta.

Per determinar si és necessari tenir les dades de les 4 compres per saber el preu de cada tipus de vi, hem de considerar la suficiència de les equacions i la seva independència lineal.

Un sistema de 3 incògnites (en aquest cas x , y i z) es pot resoldre completament si tenim un sistema de 3 equacions independents. Avaluem si això és el cas amb les nostres dades.

Les equacions són:

1. $3x + 2y = 67$
2. $2x + 4y + z = 85$
3. $x + z = 21$
4. $4y + 5z = 85$

Només necessitem 3 d'aquestes equacions si són linealment independents per determinar x , y i z .

Avaluem les tres primeres equacions:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 67 \\ 2x + 4y + z = 85 \\ x + z = 21 \end{cases}$$

Això es pot representar en matriu com:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Verifiquem si aquesta matriu té rang complet (rang 3), indicant que les equacions són independents. Si aquest és el cas, aquestes tres equacions seran suficients.

$$\text{Determinant} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculant el determinant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(4 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 2(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 0(2 \cdot 0 - 4 \cdot 1) = 3(4) - 2(2 - 1) + 0 = 10$$

El determinant és 10, que és diferent de zero, per tant, les tres equacions són linealment independents i suficients per trobar x , y i z .

Per tant, **no és necessari tenir les dades de les quatre compres**; n'hi ha prou amb qualsevol conjunt de tres equacions linealment independents per trobar els preus de cada tipus de vi. La quarta equació pot servir com una verificació o com una forma de redundància per garantir que no hi ha errors en les dades.

(c) [5 punts] Calcula quin és el preu de cada tipus de vi.

1. A partir de la tercera equació, $x + z = 21$:

$$z = 21 - x$$

2. Substituïm z en la segona equació:

$$2x + 4y + (21 - x) = 85$$

$$2x + 4y + 21 - x = 85$$

$$x + 4y + 21 = 85$$

$$x + 4y = 64$$

$$x = 64 - 4y$$

3. Substituïm x en la primera equació:

$$3(64 - 4y) + 2y = 67$$

$$192 - 12y + 2y = 67$$

$$192 - 10y = 67$$

$$-10y = 67 - 192$$

$$-10y = -125$$

$$y = \frac{125}{10}$$

$$y = 12,5$$

4. Substituïm y en $x = 64 - 4y$:

$$x = 64 - 4(12,5)$$

$$x = 64 - 50$$

$$x = 14$$

5. Substituïm x en $z = 21 - x$:

$$z = 21 - 14$$

$$z = 7$$

Per tant, els preus de cada tipus de vi són:

- Vi negre (x): 14 €
- Vi blanc (y): 12,5 €
- Vi rosat (z): 7 €