

1. Dues companyies de taxi, A i B, ofereixen tarifes diferents. La companyia A ofereix un cost fix de 20 € més 0,4 € per kilòmetre recorregut, mentre que el preu de la companyia B segueix la funció $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$, en què x representa el nombre de kilòmetres recorreguts.
- a) Quina de les dues companyies ofereix la tarifa més econòmica si fem un recorregut de 10 km? I si en fem un de 80 km? Calculeu la diferència de preu en cada cas. Hi ha cap cost fix en la tarifa de la companyia B només pel sol fet de pujar al taxi?
- [1 punt]

La tarifa de la companyia A segueix la funció $f(x) = 0,4x + 20$. Mentre que la tarifa de la companyia B és $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$.

Per trobar el preu de les tarifes si fem un recorregut de 10 o de 80 km, només hem de substituir:

$$f(10) = 24, \quad g(10) = 12.$$

Per tant, si fem un recorregut de 10 km la tarifa de la companyia A ens surt 12 euros més cara que la de la companyia B. D'altra banda,

$$f(80) = 52, \quad g(80) = 82.$$

En aquest cas la tarifa de la companyia A és 30 euros més econòmica que la tarifa de la companyia B.

Si substituïm $x = 0$ a la tarifa de la companyia B, observem que $g(0) = 10$, per tant, efectivament hi ha un cost fix de 10 euros només pel sol fet de pujar al taxi.

- b) Determineu per a quin nombre de kilòmetres recorreguts les dues tarifes coincideixen. Si considerem només els trajectes inferiors a aquesta quantitat, per a quin nombre de kilòmetres la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és màxima? Quina és aquesta diferència màxima de preu?

[1,5 punts]

Per trobar el valor per al qual les dues tarifes coincideixen, hem de resoldre l'equació:

$$0,4x + 20 = 0,01x^2 + 0,1x + 10$$

$$x^2 - 30x - 1000 = 0 \text{ que té per solucions } x = 50 \text{ i } x = -20.$$

Descartem la segona solució perquè no té sentit en el context del problema i obtenim que per a una distància de $x = 50$ km les dues tarifes coincideixen.

Per a distàncies entre 0 i 50 km observem que la segona tarifa és inferior a la primera. La diferència de preu entre totes dues tarifes si $x \in [0,50)$ vindrà donada per la funció:

$$D(x) = 0,4x + 20 - (0,01x^2 + 0,1x + 10) = -0,01x^2 + 0,3x + 10.$$

Per trobar el màxim, calculem la derivada

$$D'(x) = -0,02x + 0,3,$$

la iguaem a zero i obtenim $x = 15$.

Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a $x = 15$, i per tant, la diferència de preu és creixent, mentre que és negativa per a valors superiors a $x = 15$ i, per tant, la funció $D(x)$ és decreixent.

Quan $x = 15$ la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és de $D(15) = 12,25$ euros.