

1. Siguin $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ i la matriu identitat d'ordre dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $(A - 2I)^2 = 3I$.

[0,5 punts]

$$(A - 2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

b) Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu A en funció de les matrius A i I , i comproveu que coincideix amb la matriu B .

[1,25 punts]

$(A - 2I)^2 = 3I \Leftrightarrow A^2 - 4A + 4I = 3I \Leftrightarrow A^2 - 4A = -I \Leftrightarrow 4A - A^2 = I$ i traient factor comú d' A : $(4I - A) \cdot A = I \Leftrightarrow \boxed{A^{-1} = 4I - A}$

$$A^{-1} = 4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

c) Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat $A \cdot X = B$.

[0,75 punts]

De $A \cdot X = B$, aïllant la matriu, multiplicant per la inversa d' A per l'esquerra:

$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B, \text{ com } A^{-1} = B, (A^{-1} \cdot A)X = B \cdot B \Leftrightarrow \boxed{X = B^2}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}}$$

Observació: El càlcul de la matriu X es pot plantejar també en termes d'un sistema d'equacions lineals. La puntuació serà la mateixa repartida en els diferents passos de la resolució.