

1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x) = \frac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x}$, en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.

a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable x perquè la fàbrica no tingui pèrdues.

[1,25 punts]

Volem resoldre la inequació $f(x) \geq 0$. Resolem primer l'equació $f(x) = 0$.

Obtenim:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-0,2)(-20)}}{2(-0,2)} = \frac{-5 \pm 3}{-0,4} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 20 \end{cases}$$

Per la naturalesa del problema, la funció només té sentit per a valors de $x > 0$ (no està definida per a $x = 0$), i observem que els valors per als quals $f(x) \geq 0$, i en què, per tant, la fàbrica no té pèrdues, són els de l'interval $[5, 20]$.

b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici.

[1,25 punts]

b) Comencem calculant la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(-0,4x + 5) \cdot x - (-0,2x^2 + 5x - 20)}{x^2} = \frac{-0,2x^2 + 20}{x^2}$$

Si imposem que $f'(x) = 0$, obtenim que $x^2 = 100$, que té per solucions $x = 10$ i $x = -10$. Per la naturalesa del nostre problema, només té sentit el valor $x = 10$. Per tant, en el punt d'abscissa $x = 10$ hi ha un extrem relatiu de la funció. A l'interval $(5, 10)$ la funció és creixent perquè $f'(x)$ és positiva, mentre que a l'interval $(10, 20)$ és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant en $x = 10$ hi ha un màxim.

Per a $x = 10$ la funció pren el valor $f(10) = 1$. Per tant, per a $x = 10$ s'obté el benefici màxim i aquest benefici és de 1.000 €.