

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

[1,25 punts]

L'equació de la recta tangent en el punt de la paràbola $(a, f(a)) = (a, 4 - a^2)$ és:

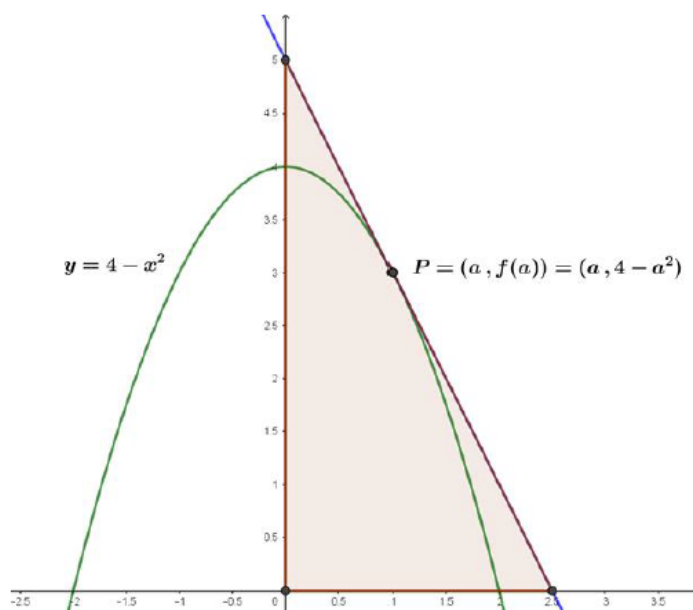
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Calculem la derivada i l'avaluem en $x = a$:

$$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(a) = -2a.$$

La recta tangent a la paràbola és:

$$y - (4 - a^2) = -2a \cdot (x - a) \rightarrow y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2 \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$$



Calculem el punt de tall amb l'eix OX ($y = 0$):

$$0 = -2ax + a^2 + 4; \quad x = \frac{a^2 + 4}{2a}$$

Tenim el punt $\left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right)$.

El punt de tall amb l'eix OY ($x = 0$) és:

$$y = a^2 + 4$$

I tenim el punt $(0, a^2 + 4)$.

- b)** Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

El triangle té vèrtexs en els punts $(0,0)$, $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$ i $(0, a^2 + 4)$, per tant, és un triangle rectangle de base $\frac{a^2+4}{2a}$ i altura $a^2 + 4$. La seva àrea és:

$$S(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + 4}{2a} \right) (a^2 + 4) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a}$$

Derivem i igualem a zero:

$$S'(a) = \frac{(a^2 + 4) \cdot (3a^2 - 4)}{4a^2}, \quad S'(a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ a = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Rebutgem la solució $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ja que a ha de ser positiu, per tant, el valor buscat és $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, que serà un mínim ja que:

$$S'(a) = \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és decreixent per a } a < \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \geq 0 & \text{si } a \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és creixent per a } a > \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$