

1. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Raoneu que la matriu B és invertible i després calculeu B^{-1} .

[1,25 punts]

La matriu B és invertible perquè els seus vectors columna (o fila) són independents (és a dir no proporcionals). Altrament perquè

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

I la seva inversa serà $B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

b) Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat $A + B \cdot X = C \cdot A$.

[1,25 punts]

És possible aïllar la matriu X de l'expressió donada:

$$X = B^{-1} \cdot (C \cdot A - A)$$

Comencem calculant el producte

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$C \cdot A - A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 23 & -16 \end{pmatrix}}.$$