

1. Considereu la funció $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

El pendent de la recta tangent és $f'(0)$. Comencem per tant calculant la derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}.$$

Per tant, $f'(0) = 2$.

El punt de tangència és $(0, f(0))$, és a dir $(0, 0)$ i per tant l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en $x = 0$ és $y = 2x$.

b) Estudieu en quins intervals la funció $f(x)$ és creixent i en quins és decreixent. Indiqueu-ne també els extrems relatius i digueu si són màxims o mínims.
[1,25 punts]

Per estudiar la monotonia de $f(x)$ estudiem el signe de la derivada. Per fer-ho, busquem els valors on la derivada pot canviar de signe que, en aquests cas, només són els punts de tall amb l'eix d'abscisses ja que és una funció contínua. Recordem que $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ i per tant si imposem que s'anul·li tenim $-2x^2 + 2 = 0$ que té per solucions $x = 1$ i $x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +\infty)$
$-2x^2 + 2$	—	+	—
$(x^2 + 1)^2$	+	+	+
$f'(x)$	—	+	—
$f(x)$	funció decreixent	funció creixent	funció decreixent

Per tant, la funció $f(x)$ és creixent a l'interval $(-1, 1)$ i és decreixent a l'interval

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. D'altra banda, té un mínim relatiu en el punt $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$ i un màxim relatiu en el punt $(1, f(1)) = (1, 1)$.