

1. En els últims mesos, la demanda de gel hidroalcohòlic ha baixat molt respecte als primers moments de la pandèmia. La funció $f(x) = \frac{12+8x}{4x+1}$, en què $x \in [0, +\infty)$ indica el nombre de mesos transcorreguts des de l'inici de la pandèmia, dona les vendes mensuals, en milions de litres, de gel hidroalcohòlic.
- a) Determineu si la funció $f(x)$ és contínua en tot el seu domini. Calculeu la taxa de variació mitjana a l'interval $[0, 1]$. A quin valor tendiran les vendes mensuals de gel al llarg del temps?
[1,25 punts]

La funció f és racional i per tant és contínua en tots els reals llevat dels punts on s'anul·la el denominador, en aquest cas $x = -\frac{1}{4}$. Com que aquest punt no pertany al domini de la funció podem afirmar que la funció f és contínua en tot el seu domini.

Per calcular la taxa de variació mitjana fem servir la fórmula

$$TVM_f[0,1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{4-12}{1} = -8$$

Finalment per respondre la darrera pregunta cal calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12+8x}{4x+1} = \frac{8}{4} = 2$$

Això ens indica que a mida que passin els mesos les vendes mensuals tendiran cap a 2 milions de litres.

- b) Comproveu que la funció és decreixent en tot el domini i trobeu la recta tangent en el punt $x = 1$.
[1,25 punts]

Per comprovar que és decreixent en tot el seu domini hem de calcular la funció derivada. Sabem que la funció és derivable en tot el seu domini perquè és una funció racional contínua en tot el seu domini.

$$f'(x) = \frac{8(4x + 1) - 4(12 + 8x)}{(4x + 1)^2} = \frac{-40}{(4x + 1)^2}$$

Com que el denominador és positiu per a qualsevol valor x del domini i el numerador és negatiu, la derivada serà negativa en tot el domini de la funció f i, per tant, aquesta funció és decreixent en tot el seu domini.

Calculem ara l'equació de la recta tangent en $x = 1$. Hem d'aplicar la fórmula

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

és a dir,

$$y - 4 = -\frac{8}{5}(x - 1)$$

i, per tant, la recta tangent és

$$y = -\frac{8}{5}x + \frac{28}{5}$$